جمهورية العراق
وزارة التربية
المديرية العامة للتعليم المهني

الرياضيات العامة

الصف الاول

تجاري عام

تأليف

د. منير عبدالخالق عزيز الخفاجي م . علي ابراهيم منصور الطائي

أنعام محمد علي الحسيني ميسون حميد فرج

ايمان علول مشتت الواسطي

بسم الله الرحمن الرحيم

المقــدمــة

يهدف التعليم المهني الى توفير القوى الفنية للقطاعات الصناعية والتجارية والزراعية. ففي مجال التجارة تستخدم الرياضيات في المعاملات المتعلقة بالبيع والشراء وتكمن حاجة الاعمال التجارية الى الرياضيات في حفظ سجلات المعاملات كمستويات الاسهم وساعات عمل الموظفين ورواتبهم ويستخدمها المتعاملون مع البنوك لمعالجة استثمار سيولتهم النقدية وتساعد كذلك شركات التأمين في حساب نسبة المخاطرة وحساب الرسوم اللازمة لتغطية التامين .

ولدور الرياضيات الاساسي في تطوير التقنيات الحديثة عنيت وزارة التربية بأعادة النظر في المواد الدراسية عامة والرياضيات خاصة نتيجة للتطور الحاصل فيها . حيث تسعى الوزارة الى توفير منهج مرن وشامل لتلبية الاحتياجات الانية والمستقبلية وتزويد الطلبة بالاسس والمهارات والمعارف للتدريب والتعليم .

وهذا الكتاب هو الاول في سلسة كتب الرياضيات للمدارس التجارية والذي يتألف من ستة فصول :

الفصل الاول: يتناول مفهوم الدالة والدوال الحقيقية والتمثيل البياني للدوال من الدرجة الاولى والثانية .

الفصل الثاني: يتناول المعادلات وكيفية ايجاد حلها اذا كانت من الدرجة الثانية في متغير واحد اومعادلتين احداهما من الدرجة الاولى والاخرى من الدرجة الثانية بالاضافة الى معادلات تحتوي على مطلق وايجاد حلها.

الفصل الثالث : ويتناول الدوال الاسية واللوغاريتمية من حيث تعريفها وقوانينها بالاضافة الى حل بعض المعادلات اللوغاريتمية البسيطة.

الفصل الرابع : يتناول المتتاليات كتطبيق وتعريف الحد العام للمتتالية وانواع المتتاليات الحسابية والهندسية واللانهائية وايجاد المجموع .

الفصل الخامس : يتناول موضوع الزاوية والتقدير الستيني والدائري والعلاقة بينهما بالاضافة الى موضوع النسب المثلثية للزوايا الحادة وبعض العلاقات لحساب المثلثات والنسب المثلثية للزوايا الخاصة وعلاقتها بدائرة الوحدة .

الفصل السادس : ويتناول الهندسة الاحداثية من حيث زاوية الميل وميل المستقيم وايجاد معادلة المستقيم الذي يمر بنقطتين او الذي علم منه ميل ونقطة وكيفية استنتاج ميل المستقيم ومعادلته وايجاد العلاقة بين ميلي مستقيمين متوازيين او متعامدين .

وقد وضعنا هذا الكتاب وفقاً للمنهج الدراسي المقرر وحاولنا ان نواكب الطرق التربوية الحديثة فقمنا بهذا الجهد المتواضع وتوخينا الاكثار من التمارين . املين من ألاخوة المدرسين ان يوافونا بملاحظاتهم بهدف التطوير .

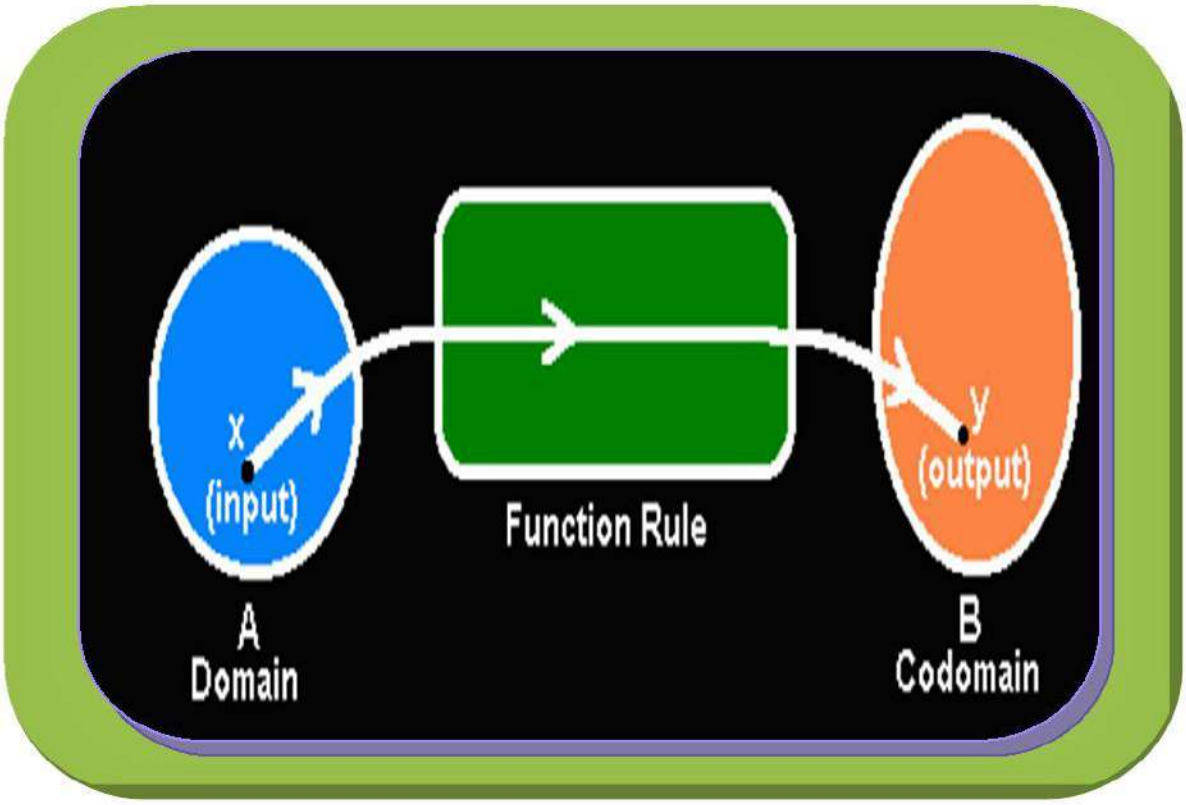
ومن الله التوفيق

المؤلفون

1

الفصل الاول

الدالــة



الفصل الاول: الـدالــة

1

FUNCTION

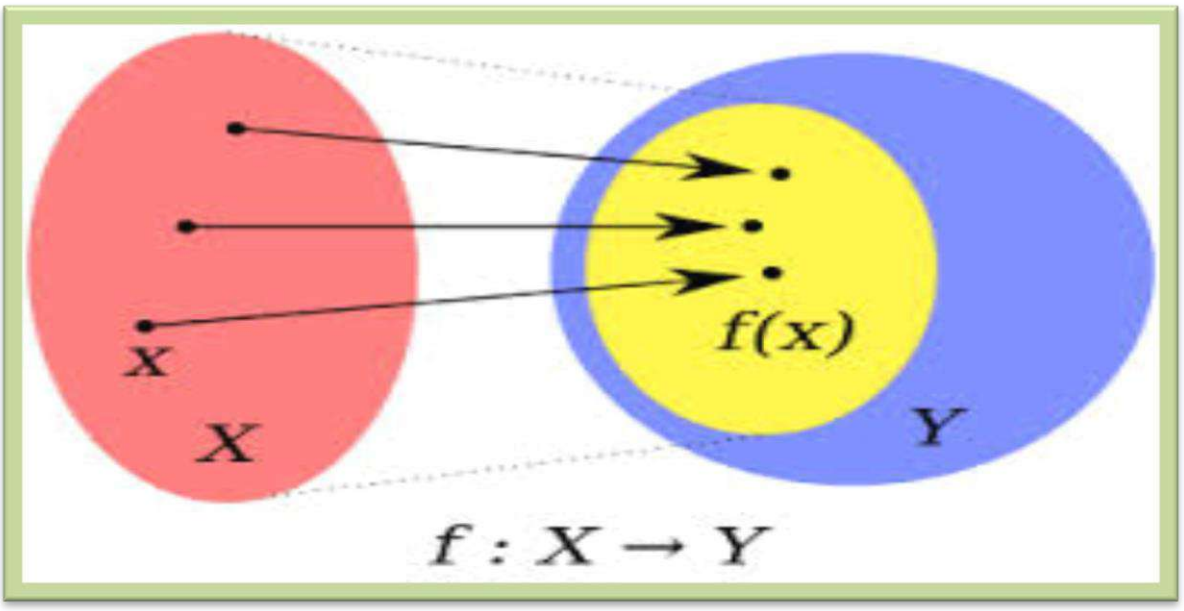
المحتوى العلمي للفصل:

[1-1] : مفهوم الدالة .

[1-2] : الدوال الحقيقية .

[1-3] :التمثيل البياني لدالة من الدرجة الاولى $y = ax + b$.

[1-4] :التمثيل البياني لدالة من الدرجة الثانية $y = ax^2 + b$.



الأهداف السلوكية

ينبغي ان يصبح الطالب في نهاية دراسته لهذا الفصل قادرا على ان:

- ❖ يتعرف على مفهوم الدالة.
- ❖ يتعرف على مفاهيم منطلق الدالة ومداها وقاعدة الاقتران.
- ❖ يتعرف على الدوال الحقيقية.
- ❖ يتعرف على انواع الدوال.
- ❖ يحل اسئلة تحتوي على دوال مختلفة.
- ❖ يتعرف على استخراج اوسع مجال للدالة.
- ❖ ان يتمكن من استخدام ورق المربعات لتمثيل الدالة الجبرية بيانيا.
- ❖ يتمكن من استخدام مفهوم الانسحاب على المحور Y لتمثيل الدوال الجبرية .

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
❖ المحور السيني	$(X-axis)$
❖ المحور الصادي	$(Y-axis)$
❖ مجموعة الاعداد الحقيقية	R
❖ مجموعة الاعداد النسبية	Q
❖ مجموعة الاعداد الصحيحة	Z
❖ مجموعة الاعداد الطبيعية	N
❖ لكل	$\forall$
❖ يوجد على الاقل	$\exists$
❖ ينتمي	$\in$
❖ بحيث أن	$\ni$

المقـــدمـــة

تمت صياغة المصطلح "Function" باللغة الإنكليزية من قبل العالم غوتفريد لايبنتز في عام 1649 لوصف كميات تتعلق بالمنحنيات كالميل عند نقطة معينة من المنحني.



العالم ليونـهارد أويلر

ثم أستخدم المصطلح بعدها من قبل عالم الرياضيات ليونـهارد أويلر في منتصف القرن الثامن عشر والذي عمم الكثير من التعبيرات الرياضية من خلال كتبه العديدة. وكان أول من كتب f(x) والتي تعنى أن الدالة تطبيق على المتغير x.

يمكن ان تعرف الدالة الرياضية أو التابع الرياضي بكائن رياضي يمثل علاقة تربط كل عنصر من عناصر المجموعة الاولى والتي تدعى المنطلق بعنصر واحد وواحد فقط من عناصرالمجموعة الثانية تدعى المستقر و ينتج من هذا التعريف مايلي :

- لكل دالة منطلق(Domain) غالباً ما يدعى X.
- لكل دالة مستقر (Codomain) غالباً ما يدعى Y.
- لا يمكن لعنصر من مجموعة المنطلق X ان يرتبط إلا بعنصر وحيد من مجموعة المستقرY .
- يمكن لعنصر من مجموعة المستقر Y أن يرتبط بعنصر أو أكثر من مجموعة المنطلق X.



العالم غوتفريد لايبنتز

فاذا كان المنطلق (المجال) :(Domain) هو مجموعة القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير المستقل x ، فإن المستقر او(المجال المقابل) هو مجموعة القيم الممكنة لقيم الدالة.

(المدى) : (Range) هو مجموعة القيم في المجال المقابل التي تقع تحت تأثير الدالة f .

و يجب عدم الخلط بين المدى والمستقر حيث يمكن للدالة ألا تغطي جميع قيم المستقر فيكون المدى مجرد مجموعة جزئية من المستقرأي ان:

$$\text{Range} \subseteq \text{Codomain}$$

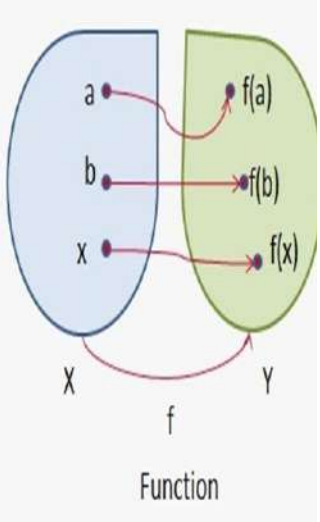
[1-1] : مفهوم الدالة

يعتبر مفهوم الدالة احد الاسس المهمة في الرياضيات وفي العلوم الفيزيائية والعلوم الاخرى وتطبيقاتها .

تعريف [1-1] :الدالة function

تسمى العلاقة $f:A \longrightarrow B$ بالدالة اذا كان كل عنصر من عناصر المجموعة غير الخالية (A) والتي تسمى بمجموعة المجال (Domain) يقترن بعنصر واحد وواحد فقط من عناصر مجموعة غير خالية (B) والتي تسمى بمجموعة المجال المقابل (Codomain) ويعبر عنها بالصيغة الرياضية الآتية:

$$f: A \longrightarrow B : \forall x \in A ; \exists y \in B \ni y = f(x)$$



ومن ذلك نستنتج ان للدالة ثلاثة مكونات تميزها هي :

1- مجال الدالة f (Domain) وتمثله المجموعة A حيث $x \in A$.
2- المجال المقابل للدالة f (Codomain) وتمثله المجموعة B حيث $y \in B$.
3- قاعدة اقتران الدالة f وهي العلاقة التي تربط كل عنصر من عناصر المجموعة A بعنصر واحد من عناصر المجموعة B .

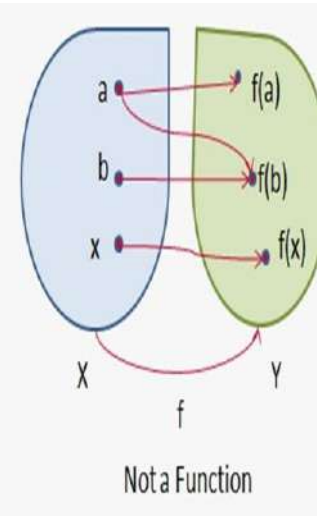
ملاحظة

1) بيان الدالة f هو مجموعة الازواج المرتبة (x ,y) والناتجة بفعل الدالة f ويعبر عنها :

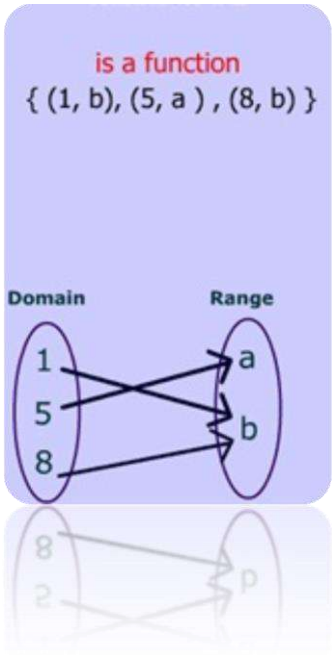
$$f = \{(x,y): y = f(x) ; \forall x \in A , y \in B \}$$

2) مدى الدالة f (Range) ونعني به مجموعة قيم هذه الدالة اي مجموعة صور عناصر مجالها وفق هذه الدالة .

3) المتغير x يسمى بالمتغير المستقل للدالة $y = f(x)$ اما المتغير y والذي تعتمد قيمته على قيمة x فانه يسمى بالمتغير التابع للدالة .



[1-2] :الدوال الحقيقية Real Functions



سنهتم هنا بالدالة التي يكون كل من مجالها ومجالها المقابل مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة الاعداد الحقيقية R.

مثال(1):- اذا كانت $A= \{ 1, 2, 3 \}$ ، $B = \{ 10, 11, 22 , 31 \}$

وكانت :

$$f: A \longrightarrow B$$
$$f(x) = x^2 + 2x + 7$$

1. اكتب الدالة f على شكل مجموعة من الازواج المرتبة (بيان الدالة).
2. اكتب مدى الدالة f (Rang) .

الحل:-

1-بما ان $f(x) = x^2 + 2x + 7$ لذلك فأن

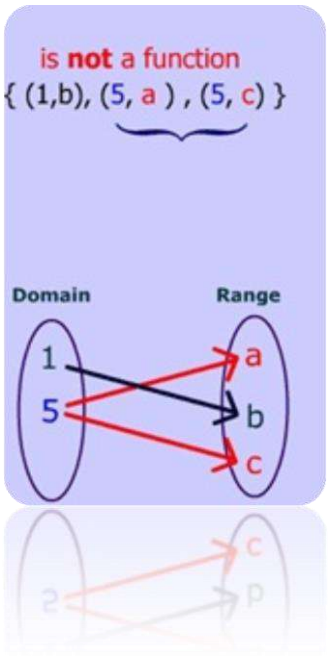
$$f(1) = (1)^2 + 2(1) + 7 = 10$$

$$f(2) = (2)^2 + 2(2) + 7 = 15$$

$$f(3) = (3)^2 + 2(3) + 7 = 22$$

وبذلك يكون بيان الدالة $\{ (1,10) , (2,15) , (3,22) \}$

2- مدى الدالة = $\{ 10 ,15,22 \}$.



مثال(2):- اذا كانت X مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة الاصغر من 6 وكانت $f : X \rightarrow Z$ ، حيث Z مجموعة الاعداد الصحيحة :

جد مدى الدالة اذا كان:

$$f(x) = 3x - 4$$

الحـل:-

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$f(x) = 3x - 4$

$f(1) = (3)(1) - 4 = -1$

$f(2) = (3)(2) - 4 = 2$

$f(3) = (3)(3) - 4 = 5$

$f(4) = (3)(4) - 4 = 8$

$f(5) = (3)(5) - 4 = 11$

∴ مدى الدالة f $Range = \{-1, 2, 5, 8, 11\}$

مثال(3):- اذا كان $g(x) = 3x - 8$ فجد قيمة x عندما $g(x) = 12$ مع العلم ان $g: Q \to Q$ حيث Q مجموعة الاعداد النسبية .

الحـل:-

$g(x) = 3x - 8$

$g(x) = 12$

$\therefore 12 = 3x - 8$

$\Rightarrow 3x = 12 + 8$

$\Rightarrow 3x = 20$ بقسمة طرفي المعادلة على (3)

$x = \frac{20}{3} \in Q$

تمــارين [1-1]

1) اذا كان $A= \{ 1 , 2 , 3 , -3 \}$ وكان $f: A \to Z$ حيث Z مجموعة الاعداد الصحيحة جد مدى الدالة اذا كان $f(x) = 4x - 3$.

2) اذا كان $g : N \to Q$ وكان $g(x) = 3x + 5$, حيث N مجموعة الاعداد الطبيعية وQ مجموعة الاعداد النسبية :
   a) اكتب مدى الدالة .
   b) اذا كان $g(x) = 12$ فجد قيمة x .
   c) اكتب مجموعة الازواج المرتبة التي تمثل الدالة .

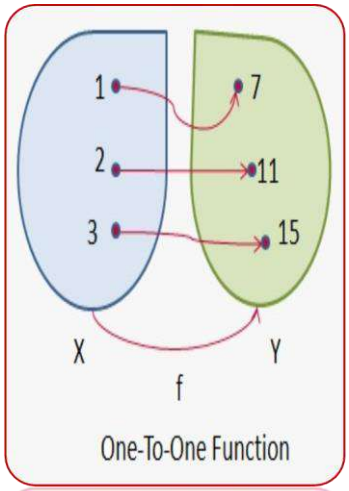
3) اذا كان $f: A \to Q$ وكان $f(x) = 2x^2 - x + 5$, حيث $A= \{ -1, 0, 1 \}$
   a) اكتب مدى الدالة .
   b) اكتب مجموعة الازواج المرتبة التي تمثل الدالة .

[1-2-1] : انواع الدوال Types of Functions

1-الدالة المتباينة

تسمى الدالة $f: A \to B$ دالة متباينة (one-to-one) اذا حققت احد الشرطين الاتيين:

$$1)\ \forall\ x_1, x_2 \in A\ ,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$
$$2)\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$



مثال(4):- اذا كانت $f: R \to R$, $f(x) = 5x - 3$ بين فيما اذا كانت الدالة f متباينة ام غيرمتباينة .

الحل :- هنالك طريقتان للحل هما:

الطريقة الاولى :

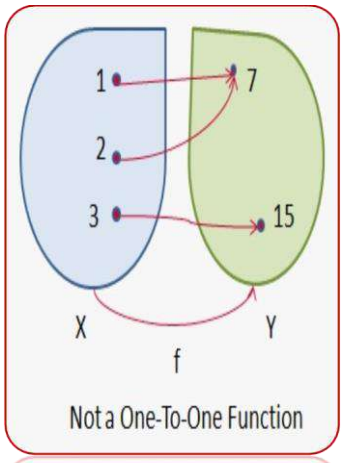
نفرض ان $x_1 \neq x_2$ وبضرب الطرفين بالعدد 5 فينتج لدينا

$$5x_1 \neq 5x_2$$

$5x_1 - 3 \neq 5x_2 - 3$ نضيف -3 للطرفين

$f(x_1) \neq f(x_2)$ حسب الشرط الاول

ومنها نستنتج بان الدالة f هي دالة متباينة



الطريقة الثانية :

حسب الشرط (2) نفرض ان : $x_1, x_2 \in R$, $f(x_1) = f(x_2)$

بأضافة العدد 3 للطرفين $5x_1 - 3 = 5x_2 - 3$

$$5x_1 - 3 + 3 = 5x_2 - 3 + 3$$

بقسمة الطرفين على العدد 5 $5x_1 = 5x_2$

$$x_1 = x_2$$

ومن ذلك نستنتج ان الدالة f دالة متباينة

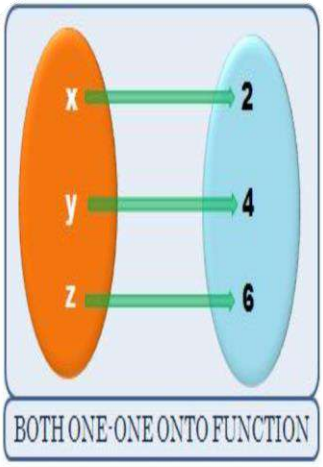
مثال(5):- اذا كانت $A= \{ -2, 0, 1 , 2 \}$, $B = \{ 1, 2, 5 , 10 \}$ وكانت $g: A \to B$, حيث أن $g(x) = x^2 + 1$, بين فيما اذا كانت الدالة g متباينة ام غير متباينة ؟

الحل:-

الدالة g غير متباينة

بتطبيق الشرط (1) $-2 \neq 2$

بينما : $g(-2) = g(2) = 5$

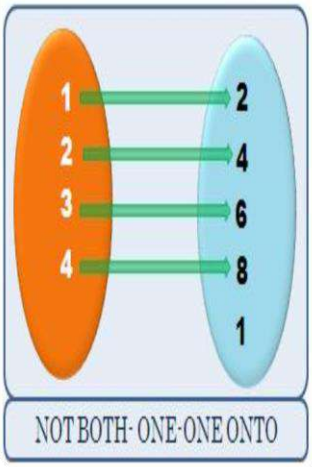


2- الدالة الشاملة

تسمى الدالة $f: A \to B$ دالة شاملة (onto) اذا حققت الشرط الاتي :

$$\forall y \in B , \exists x \in A : y = f(x)$$

اي ان المدى = المجال المقابل .



مثال(6):- اذا كانت $f: R \to R$ حيث ان $f(x) = 4x - 5$ بين فيما اذا كانت الدالة f شاملة ام غير شاملة .

الحل:-

نلاحظ هنا ان المدى (Range) هو مجموعة الاعداد الحقيقية R وان مجموعة المجال المقابل هي R ايضاً وعلية تكون الدالة f شاملة اي ان .

$$y = 4x - 5$$

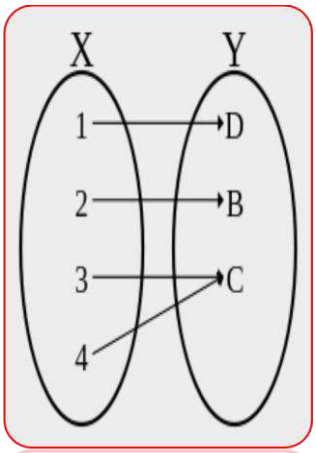
$$x = \frac{1}{4}(y + 5)$$

يعني كل y في المجال المقابل R هي صورة x في المجال R

∴ المجال المقابل = المدى

مثال(7):- اذا كانت $f: R \to R$, $f(x) = 3 - 5x^2$ بين فيما اذا كانت الدالة f شاملة ام غير شاملة .

الحل:-



$$y = 3 - 5x^2 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{3 - y} \ , y \leq 3$$

نلاحظ ان المدى (Range) لا يساوي المجال المقابل وعليه تكون الدالة f غير شاملة

مثال(8):- اذا كانت $f: N \to N$, $f(x) = 2x$ بين فيما اذا كانت الدالة f شاملة.

الحل:-

$$y = 2x \Rightarrow x = y/2$$

نلاحظ ان المدى (Range) لا يساوي المجال المقابل لان y تمثل فقط الاعداد الطبيعية التي تقبل القسمة على 2

∴ الدالة f ليست شاملة

3-الدالة المتقابلة

تسمى الدالة $g: M \to N$ دالة متقابلة (Correspondence) اذا حققت الشرطين الآتيين :

1- دالة متباينة .
2- دالة شاملة .

مثال(9):- اذا كانت $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{3, 6\}$

وكانت $g: A \to B$, بحيث ان:

$$g(x) = \{(2, 3), (3, 6), (4, 3)\}$$

بين فيما اذا كانت الدالة g متقابلة ام ليست متقابلة ؟

الحل:-

1. الدالة غير متباينة لان $g(2) = g(4) = 3 \Rightarrow 2 \neq 4$
2. الدالة شاملة لان : المدى = المجال المقابل = { 3,6 }

لذلك الدالة ليست متقابلة لأنها لا تحقق التعريف .

مثال(10):- اذا كانت $g: Z \to Z$ حيث $g(x) = 3x^2 - 5$ بين فيما اذا كانت الدالة g متقابلة حيث Z مجموعة الاعداد الصحيحة .

الحـل:-

$$g(x) = 3x^2 - 5$$

$$g(-2) = 3(-2)^2 - 5 = 7$$

$$g(-1) = 3(-1)^2 - 5 = -2$$

$$g(0) = 3(0)^2 - 5 = -5$$

$$g(1) = 3(1)^2 - 5 = -2$$

$$g(2) = 3(2)^2 - 5 = 7$$

عليه فأن :-

الدالة g ليست متباينة لان $g(-2) = g(2) = 7 \implies -2 \neq 2$.

الدالة g ليست شاملة لان : المدى $\neq$ المجال المقابل .

الدالة g ليست متقابلة لأنها لا تحقق التعريف .

تمـارين [2-1]

1. بين فيما اذا كانت الدالة $g(x) = 1 - 5x^2$ متباينة .
2. بين فيما اذا كانت الدالة $f(x) = 15x - 1$ شاملة .
3. بين فيما اذا كانت الدالة $g(x) = 1 - 7x^2$ متقابلة.
4. اذا كانت $g(x) = 2x^2 + x - 1$ جد قيمة $g(-1)$ وبين ان $g(x)$ متباينة ، شاملة ، متقابلة ، ولماذا ؟

[1-2-2] : اوسع مجال للدالة

تتم عملية ايجاد اوسع مجال للدالة حسب نوع الدالة كما يلي:

1- **الدالة الثابتة والخطية ومتعددة الحدود** (الدوال غير الجذرية وغير الكسرية): ويكون اوسع مجال لها هو مجموعة الاعداد الحقيقية R .

مثال(11):- جد اوسع مجال للدوال الآتية :

$\mathbf{a-}\ f(x) = 6$

$\mathbf{b-}\ g(x) = 6x + 7$

$\mathbf{c-}\ f(x) = x^2 + 2x + 4$

الحـل:

a- الدالة $f(x) = 6$ دالة ثابتة واوسع مجال لها هو R .

b- الدالة $g(x) = 6x + 7$ دالة خطية واوسع مجال لها هو R .

c- الدالة $f(x) = x^2 + 2x + 4$ متعددة حدود من الدرجة الثانية ونلاحظ انها معرفة في R، واوسع مجال لها هو R .

2- **الدالة الكسرية :** ويكون اوسع مجال للدالة هو مجموعة الاعداد الحقيقية R ما عدا قيم x التي تجعل المقام يساوي صفراً.

مثال(12):- جد اوسع مجال للدوال الاتية:

$\mathbf{a-}\quad f(x) = \frac{x}{x+1}$

$\mathbf{b-}\ g(x) = \frac{x-1}{(x-2)(x+3)}$

الحـل:-

a- الدالة $f(x) = \frac{x}{x+1}$ معرفة على جميع قيم $x \in R$ عدا قيمة $x = -1$ ، لأنها تجعل المقام يساوي صفر ، لذلك فان اوسع مجال للدالة $R \setminus \{-1\}$.

b - الدالة $g(x) = \frac{x-1}{(x-2)(x+3)}$ معرفة على جميع قيم $x \in R$ عدا قيمتي $x = -3$ ، $x = 2$

لأنها تجعل المقام يساوي صفر ، لذلك فان اوسع مجال للدالة $R \setminus \{-3, 2\}$.

3- **الدالة الجذرية:** ويكون اوسع مجال للدالة هو مجموعة الاعداد الحقيقية R التي تجعل المقدار الجبري الموجود داخل الجذر موجبا او صفرا (ليس سالبا).

مثال(13):- جد اوسع مجال للدوال الاتية :

a- $f(x) = \sqrt{4-x}$.

b- $g(x) = \sqrt{3x-5}$.

c- $f(x) = \sqrt{(x-2)(x-3)}$.

الحـل:-

a- الدالة $f(x) = \sqrt{4-x}$ معرفة لقيم محددة في R تلك القيم التي تكون $x \leq 4$ (لا تجعل قيمة ما تحت الجذر سالبة) فاذا جعلنا المقدار الذي تحت الجذر $4 - x \geq 0$ فان $x \leq 4$ لذلك فأن اوسع مجال للدالة:

$$\{x \in R : x \leq 4\}$$

b- الدالة $g(x) = \sqrt{3x-5}$ معرفة لقيم محددة في R تلك القيم التي تكون $x \geq \frac{5}{3}$ ، لذلك فأن اوسع مجال للدالة:

$$\left\{x \in R : x \geq \frac{5}{3}\right\}.$$

c- الدالة $f(x) = \sqrt{(x-2)(x+3)}$ معرفة لقيم محددة في R تلك القيم التي يكون فيها $(x-2)(x+3) \geq 0$ ، ولحل هذه المتباينة :

$(x-2)(x+3)=0 \quad \Rightarrow \quad x=2$ او $x=-3$

$x-2 \geq 0 \ , \ x+3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 2$

أو

$x-2 \leq 0 \ , \ x+3 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq -3$

∴ اوسع مجال للدالة هو:

$$\{x : x \in R, x \leq -3\} \cup \{x : x \in R, x \geq 2\}$$

تمـاريـن [1-3]

1-جد اوسع مجال لكل من الدالتين الآتيتين :

a- $f(x) = x^2 + 2x + 8.$

b- $g(x) = 6x^2 + 5.$

2-جد اوسع مجال لكل من الدالتين الآتيتين:

a- $f(x) = \frac{x}{x^2-5x+6}.$

b- $g(x) = \frac{x}{(x+3)(x-4)}.$

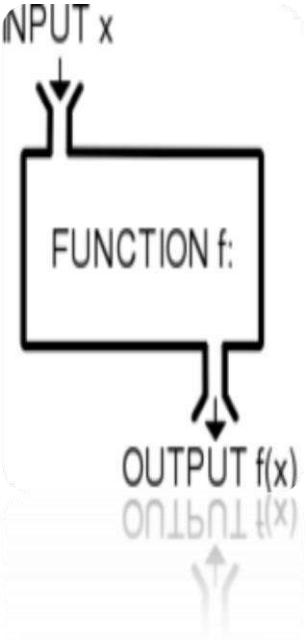
3- جد اوسع مجال لكل من الدالتين الآتيتين:

a- $f(x) = \sqrt{5-7x}.$

b- $g(x) = \sqrt{3x+2}.$

[1-3] : التمثيل البياني لدالة من الدرجة الاولى

ان الشكل العام للدالة من الدرجة الاولى $y = f(x) = ax + b$ حيث ان كل من a , b اعداد ثابتة تنتمي لمجموعة الاعداد الحقيقية وان $a \neq 0$.



يمكن رسم هذه الدالة عن طريق اختيار قيمتين للمتغير x والحصول على القيمتين المناظرتين للمتغير y . وبالتوصيل بين النقطتين على المستوى الاحداثي نحصل على المخطط البياني للدالة والذي هو عبارة عن خط مستقيم .

مثال(14):- اذا كانت $f: R \to R$, $f(x) = 3x - 6$ مثل المخطط البياني للدالة.

الحـل:-

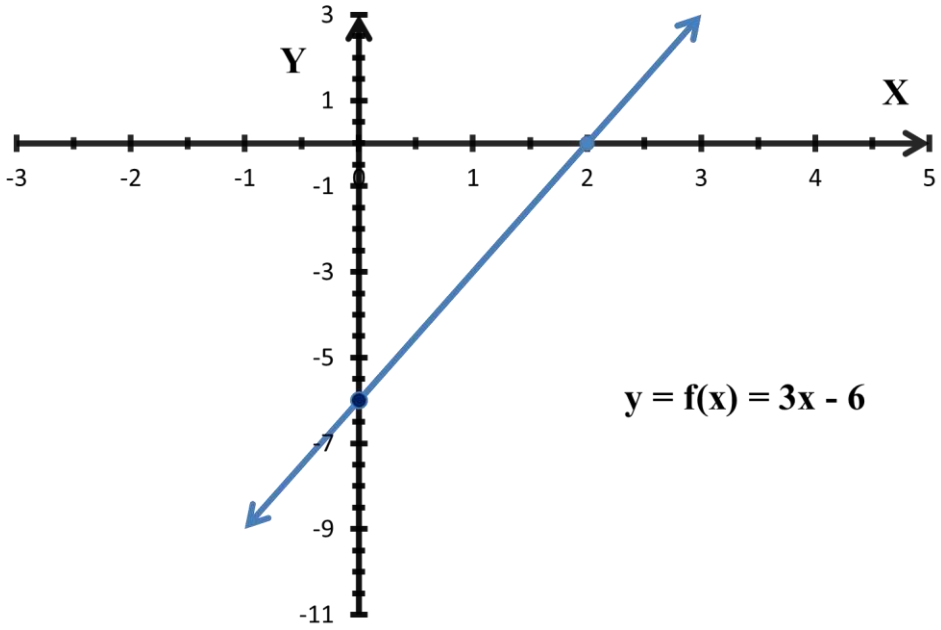
1- نجعل الدالة تساوي $y = f(x) = 0$ وبذلك نحصل على قيمة لـ x

$$3x - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 6/3 = 2 \Rightarrow (2 , 0)$$

2- نعوض عن $x = 0$ وبذلك نحصل على قيمة لـ $y = f(x)$

$$y = (3 \times 0) - 6 = 0 - 6 = -6 \Rightarrow (0 , -6)$$

3- نبدأ بتعيين النقاط $(2 , 0)$, $(0 , -6)$ على المستوى الاحداثي ونوصل بينهما بخط مستقيم .



مثال(15):- ارسم المخطط البياني للدالة $g: R \to R$ حيث $g(x) = 8 - 4x$

الحـل:-

1- نعوض عن $y = g(x) = 0$ وبذلك نحصل على قيمة لـــ x

$$8 - 4x = 0 \Rightarrow -4x = -8 \Rightarrow x = \frac{-8}{-4} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 0)$$

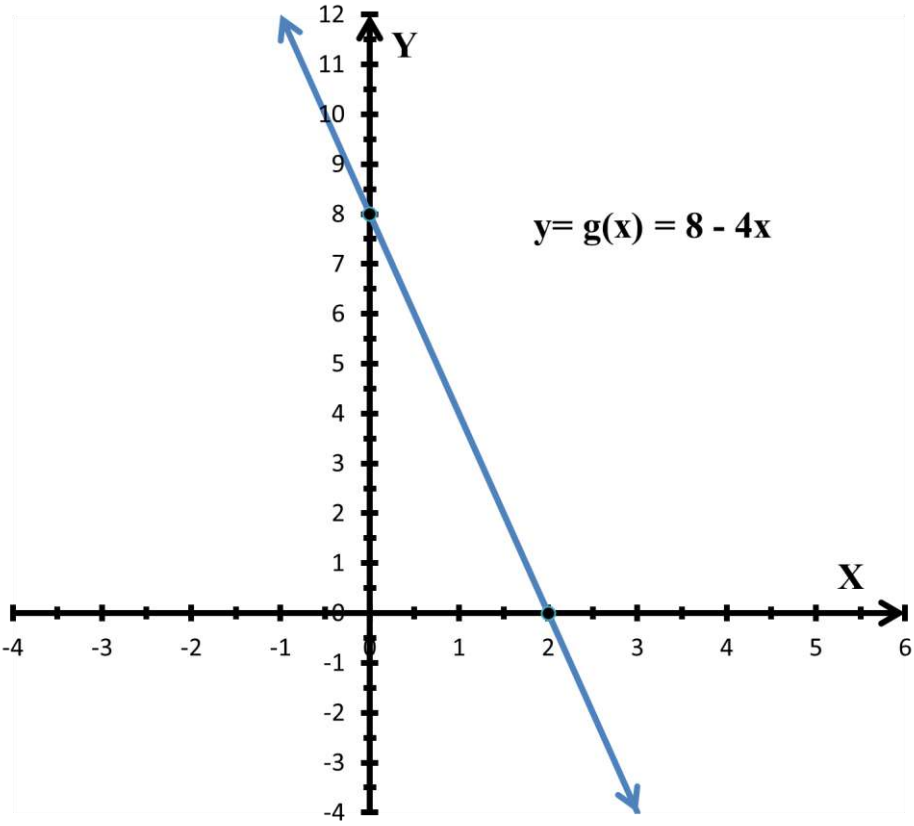
$\therefore (2, 0)$ هي نقطة تقاطع الدالة مع X-axis

2- نعوض قيمة $x = 0$ وبذلك نحصل على قيمة لـ $y = g(x)$

$$y = 8 - (4 \times 0) = 8 - 0 = 8 \Rightarrow (0, 8)$$

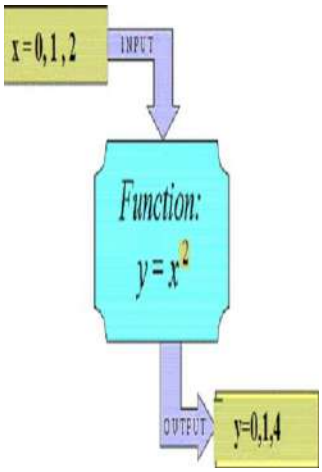
$\therefore (0, 8)$ هي نقطة تقاطع الدالة مع Y-axis

3- نبدأ بتعيين النقاط $(0, 2)$, $(0, 8)$ على المستوى الاحداثي ونوصل بينهما بخط مستقيم .



[1-4] :التمثيل البياني لدالة من الدرجة الثانية

ان الشكل العام لدالة من الدرجة الثانية $y = f(x) = ax^2 + b$ وتمثل بيانيا بشكل خط منحني مقعر اذا كانت اشارة x^2 موجبة وخط منحني محدب اذا كانت اشارة x^2 سالبة بعد تعيين ثلاث نقاط على الاقل .



مثال(16):- اذاكانت $f: R \to R$

حيث ان: $f(x) = x^2$ مثل المخطط البياني للدالة .

الحل:-

1- نعوض قيمة $x = -1$ وبذلك نحصل على قيمة $y = f(x)$

بذلك تكون احداثيات النقطة الاولى $(-1, 1)$, $y = f(-1) = (-1)^2 = 1$

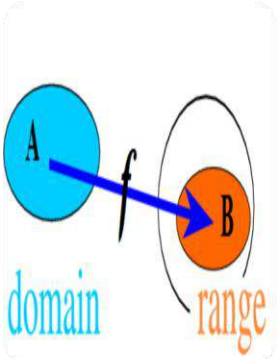
2- نعوض قيمة $x = 0$ وبذلك نحصل على قيمة $y = f(x)$

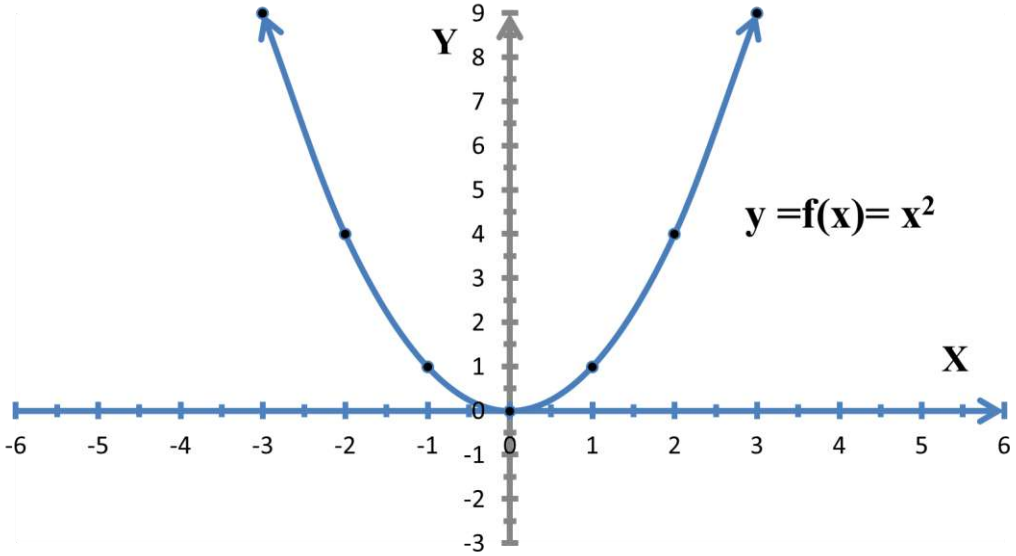
بذلك تكون احداثيات النقطة الثانية $(0, 0)$, $y = f(0) = (0)^2 = 0$

3- نعوض قيمة $x = 1$ وبذلك نحصل على قيمة $y = f(x)$

بذلك تكون احداثيات النقطة الثالثة $(1, 1)$, $y = f(1) = (1)^2 = 1$

4- نبدا بتعيين النقاط $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ ونوصل بينهما نحصل على منحني مقعر:





مثال(17):- ارسم المخطط البياني للدالة $f: R \to R$

حيث أن : $f(x) = -x^2$

الحـل:

1- نعوض عن قيمة $x = -2$ وبذلك نحصل على قيمة $y = f(x)$

$y = f(-2) = -(-2)^2 = -4 \Rightarrow (-2, -4)$

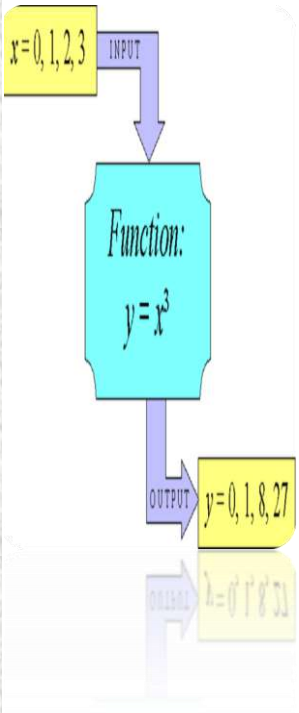
2- نعوض عن قيمة $x = 0$ وبذلك نحصل على قيمة $y = f(x)$

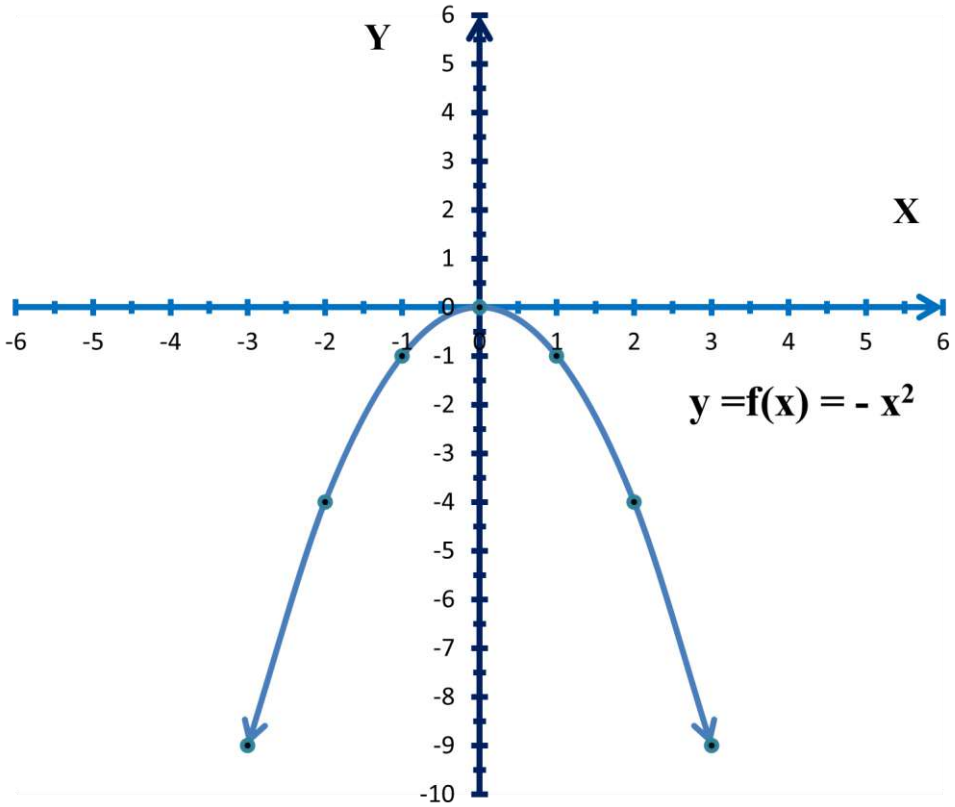
$y = f(0) = -(0)^2 = 0 \Rightarrow (0, 0)$

3- نعوض عن قيمة $x = 2$ وبذلك نحصل على قيمة $y = f(x)$

$y = f(2) = -(2)^2 = -4 \Rightarrow (2, -4)$

4- نبدا بتعيين النقاط $(-2, -4)$, $(0, 0)$, $(2, -4)$ على المستوى الاحداثي فنحصل على منحني محدب كما في الشكل الأتي:





مثال(18):- ارسم المخطط البياني للدالة $f: R \to R$

حيث أن : $f(x) = x^2 + 2$

الحـل:-

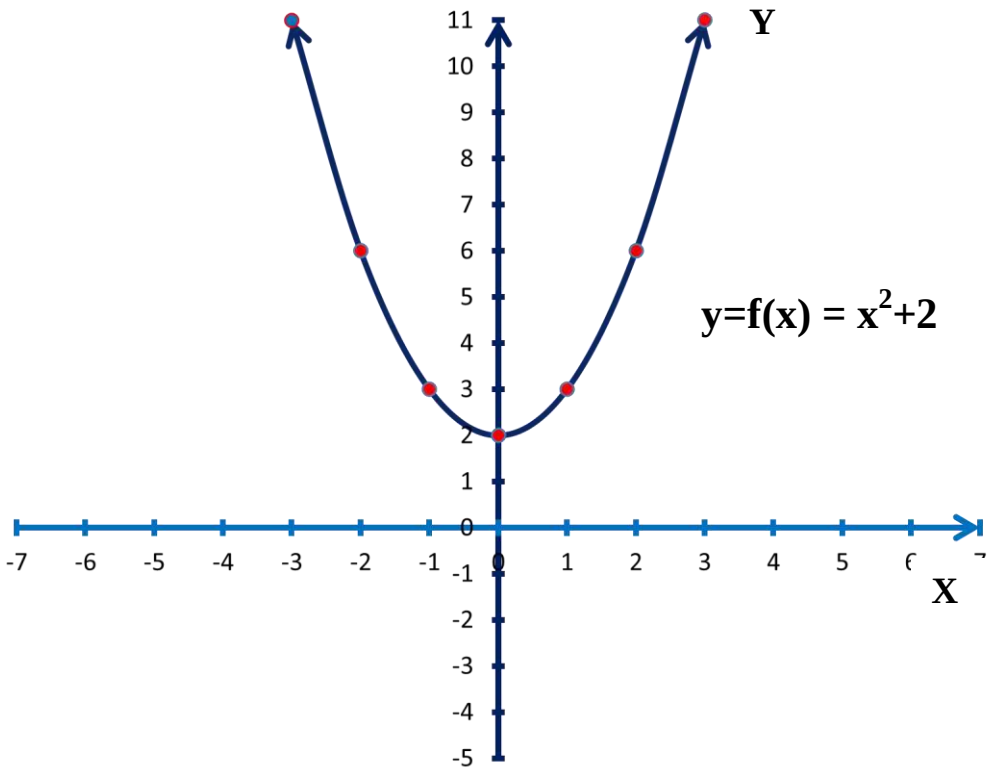
ان منحني الدالة $f(x) = x^2 + 2$ ينتج من انسحاب لمنحني الدالة $f(x) = x^2$ نحوالاتجاه الموجب للمحورالصادي Y وبمقدار 2 وحدات :

$f(-1) = (-1)^2 + 2 = 3 \Rightarrow (-1, 3)$

$f(0) = (0)^2 + 2 = 2 \Rightarrow (0, 2)$

$f(1) = (1)^2 + 2 = 3 \Rightarrow (1, 3)$

وبتمثيل هذه النقاط والتوصيل بينهما بخط منحني يظهر الشكل الأتي:



مثال(19):- ارسم المخطط البياني للدالة $g: R \to R$

حيث أن : $g(x) = x^2 - 3$

الحـل:-

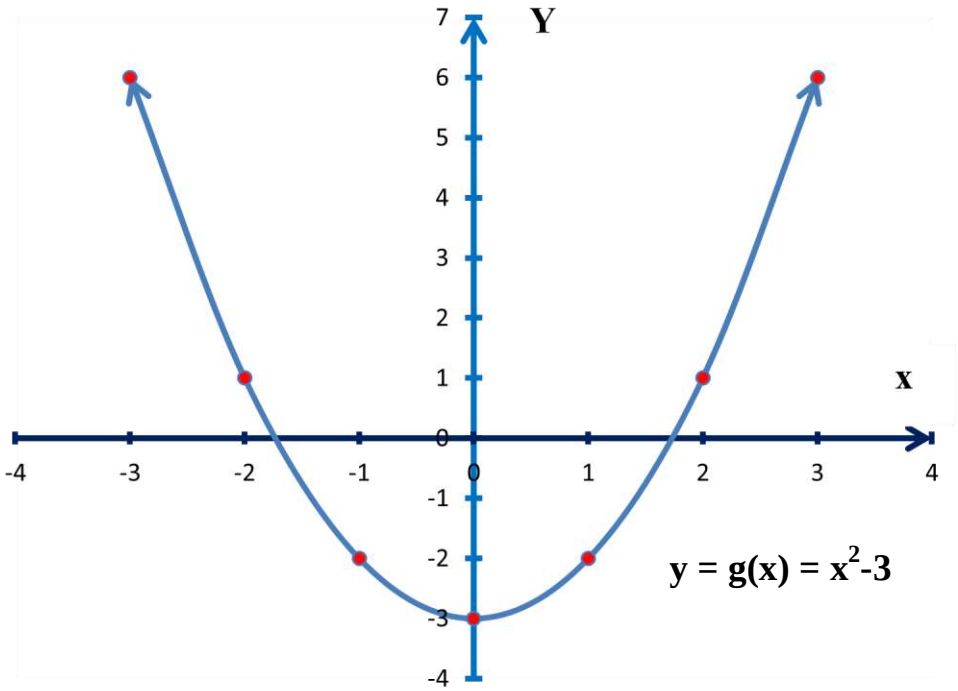
ان منحني الدالة $g(x) = x^2 - 3$ ينتج من انسحاب لمنحني للدالة $g(x) = x^2$ نحو الاتجاه السالب للمحورالصادي Y وبمقدار 3 وحدات

$g(-1) = (-1)^2 - 3 = -2 \Rightarrow (-1, -2)$

$g(0) = (0)^2 - 3 = -3 \Rightarrow (0, -3)$

$g(1) = (1)^2 - 3 = -2 \Rightarrow (1, -2)$

وبتمثيل هذه النقاط والتوصيل بينهما بخط منحني يظهر الشكل الآتي:

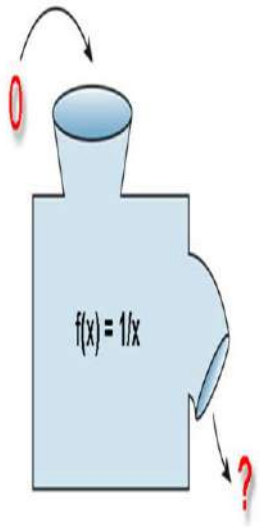


مثال(20):- ارسم المخطط البياني للدالة $f: R \to R$

حيث أن: $f(x) = 4 - x^2$

الحـل:-

ان منحني الدالة $f(x) = 4 - x^2$ ينتج من انسحاب لمنحني للدالة $f(x) = -x^2$ نحو الاتجاه الموجب للمحورالصادي Y وبمقدار 4 وحدات :

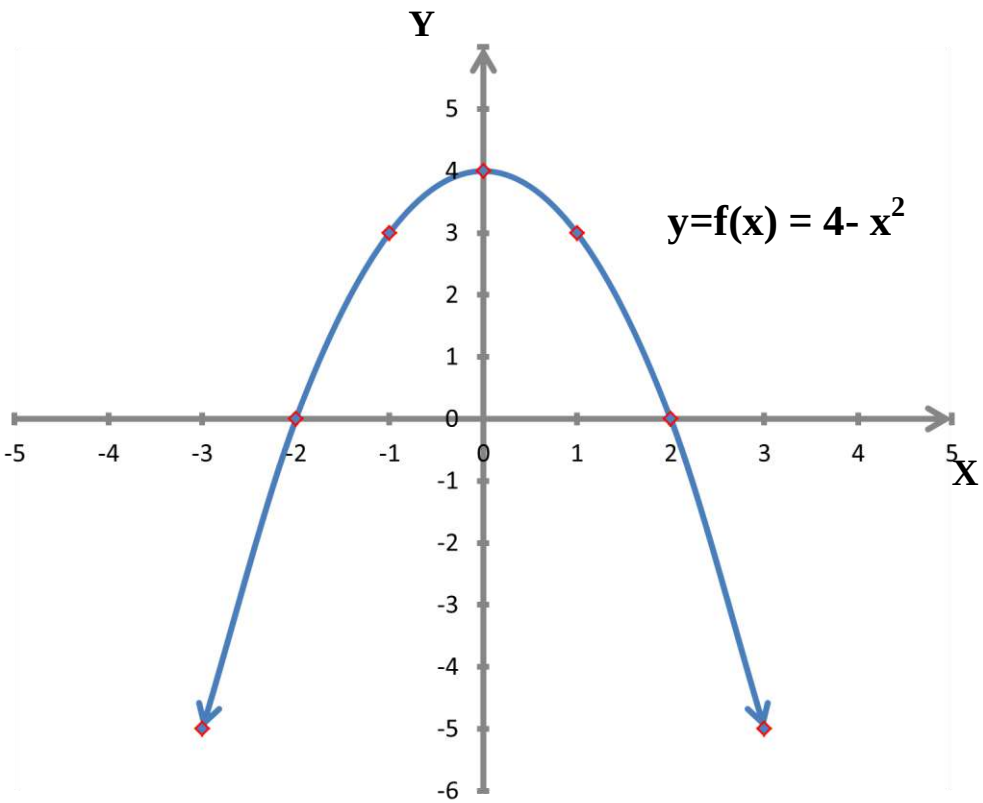


$$f(-1) = 4 - (-1)^2 = 3 \Rightarrow (-1, 3)$$

$$f(0) = 4 - (0)^2 = 4 \Rightarrow (0, 4)$$

$$f(1) = 4 - (1)^2 = 3 \Rightarrow (1, 3)$$

وبتمثيل هذه النقاط والتوصيل بينهما بخط منحني يظهر الشكل لآتي:



تمارين [1-4]

1) مثل الدوال الاتية بيانياً :

a. $f(x) = 5x - 7$.

b. $g(x) = -4$.

c. $r(x) = 2x + 5$.

2) مثل الدوال الاتية بيانياً:

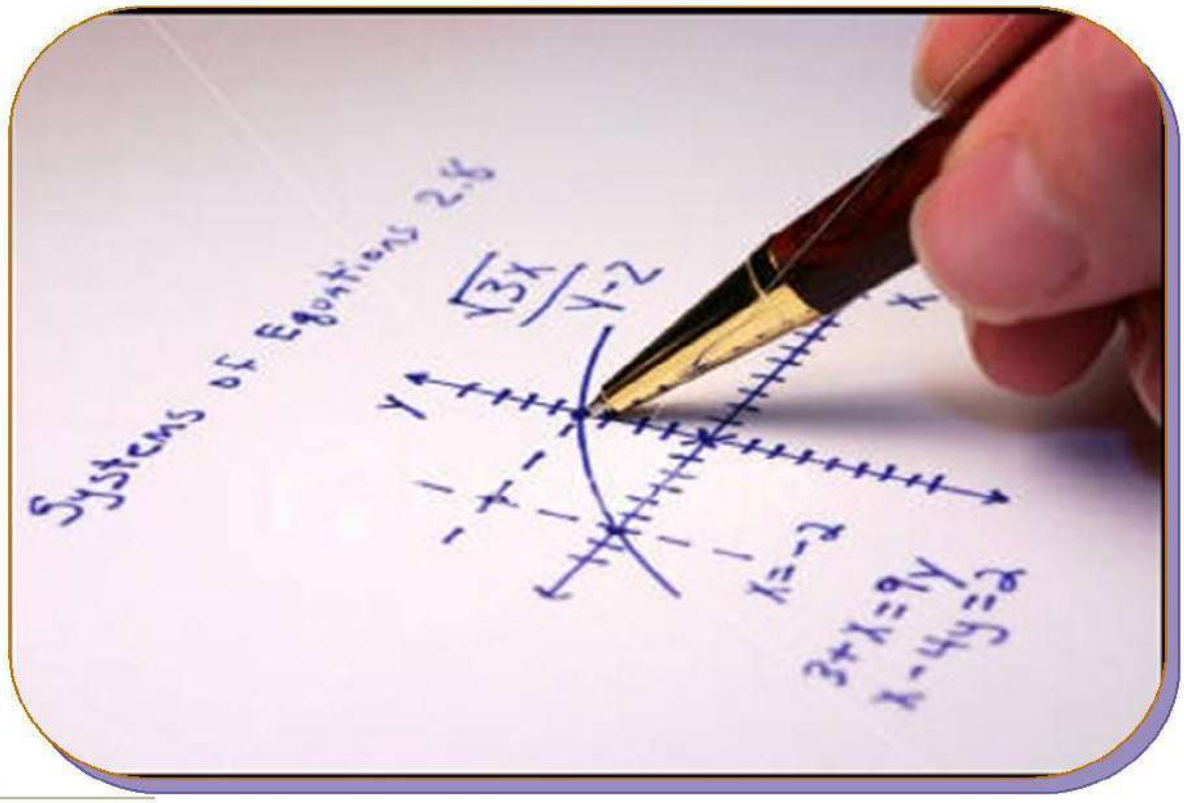
a. $f(x) = x^2 + 5$.

b. $g(x) = -4x^2$.

c. $r(x) = x^2 - 7$.

2

الفصل الثاني
المعـــادلات



الفصل الثاني : المعادلات

2

Equations

المحتوى العلمي للفصل:

[2-1] : حل المعادلة من الدرجة الثانية بمتغيرواحد (التحليل - اكمال المربع – الدستور).

[2-2] : الفترات الحقيقية.

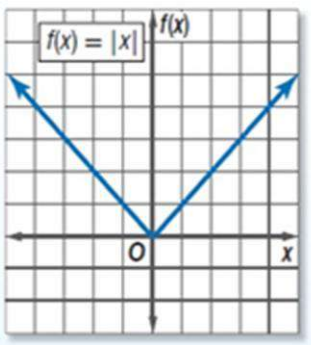
[2-3] : دالة القيمة المطلقة للعدد الحقيقي من الدرجة الاولى.

[2-4] : حل المعادلات التي تحتوي على مطلق.

[2-5] : حل المعادلات الانية من الدرجة الاولى باستخدام الحذف والتعويض تحليليا وبيانيا.

[2-6] : حل معادلتين احداهما من الدرجة الاولى والاخرى من الدرجة الثانية بطريقه التعويض.

دالة القيمة المطلقة الأساسية



الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)=|x|$ ، وتُعرَّف على النحو الآتي:

$$f(x)=\begin{cases} x & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x=0 \\ -x & , \quad x<0 \end{cases}$$

شكل التمثيل البياني	على شكل حرف V
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى	مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة
المقطعان	$x=0, f(x)=0$
ولايمكن أن تكون	$f(x)<0$

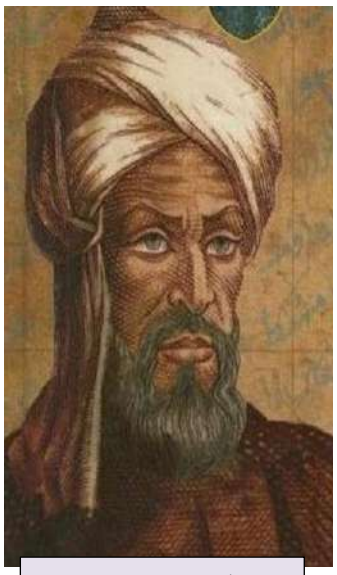
الأهداف السلوكية

ينبغي ان يصبح الطالب في نهاية دراسته لهذا الفصل قادرا على :

- ان يتعرف على حل المعادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد (التحليل –اكمال المربع-الدستور) .
- أن يتعرف على مفهوم الفترات وانواع الفترات.
- أن يتعرف على مفهوم دالة القيمة المطلقة للعدد الحقيقي من الدرجة الاولى وكيفية تمثيلها بيانيا.
- أن يتمكن من حل معادلات تحتوي على القيمة المطلقة .
- أن يتمكن من حل المعادلات الانية بأستخدام طريقة الحذف والتعويض .
- أن يتمكن من حل معادلتين احداهما من الدرجة الاولى والاخرى من الدرجة الثانية (بطريقة التعويض) .

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
مجموعة الحل	S . s .
القيمة المطلقة للعدد X	|x|
اتحاد مجموعتين	∪
تقاطع مجموعتين	∩
فضلة X على Y	X \ Y
فضلة Y على X	Y \ X

المقدمة



الخوارزمي

لقد سبق ان درست في السنوات الماضية معنى المعادلة وكيفية حل المعادلات ذات المجهول الواحد ، والمجهولين من الدرجة الاولى .

لقد وضع العرب حلولاً جبرية وهندسية لمعادلات متنوعة التركيب قاموا بابتداعها ، وقد قسموا المعادلات من الدرجة الثانية الى ستة اقسام ووضعوا حلاً لكل منها كما حلوا كثيراً من معادلات الدرجة الاولى والثالثة والرابعة واستعملوا الرموز في الاعمال الرياضية حيث سبقوا الغرب بذلك .

لقد كان لهم الدور الكبير في ارساء علم الجبر وهم اول من استعمل لفظ الجبر على هذا النوع من الرياضيات واول من وضع اصوله هو الخوارزمي في زمن المأمون وكان كتابه (الجبر والمقابلة) مصدراً اساسياً للعرب والغرب في هذا المضمار . ومن اشهرهم في هذا المجال العالم (ابن اسلم) وهو رياضي ومهندس سوري درس في بغداد والقاهرة وقد اضاف كثيراً لأعمال الخوارزمي في الجبر وقد اوجد جذري معادلات الدرجة الثانية وعالج قوانين المعادلات ذات المجاهيل الخمسة .

في هذا الفصل سنقدم فكرة مبسطة لمفهوم المعادلة وكيفية ايجاد حلها بطرق مختلفة ، كما سنهتم بدراسة بعض المفاهيم الحديثة لحل المعادلات وتمثيلها على خط الاعداد الحقيقية .



ابن اسلم

[2-1] : حل المعادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد
(التحليل ، اكمال المربع ، الدستور)

لقد تعلمت في السنة السابقة أن كل من المعادلات الاتية تسمى معادلات من الدرجة الثانية بمتغير واحد:



$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$x^2 = 2x$$

$$9x^2 = 16$$

$$(x + 4)(x - 3) = 0$$ وكذلك

وبصورة عامة فان كل معادلة يمكن وضعها بالصورة :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

بحيث ان : $a \neq 0, a, b, c \in R$

تسمى معادلة من الدرجة الثانية من متغير واحد x وحل المعادلة يعني ايجاد مجموعة الاعداد التي لو عوض بها في المعادلة لتحققت .

فمثلا المجموعة $\{1,2\}$ تحقق المعادلة :

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

وذلك لان:-

$$(1)^2 - (3 \times 1) + 2 = 0$$

$$(2)^2 - (3 \times 2) + 2 = 0$$

لذا فأن مجموعة حلول المعادلة $x^2 - 3x + 2 = 0$ هي $\{1, 2\}$

واذا عوضنا في هذه المعادلة بأعداد اخرى غير مجموعة الاعداد السابقة فانها لاتتحقق.

ان ايجاد مجموعة حل المعادلة من الدرجة الثانية يتم بأحدى الطرق الاتية :

1. التحليل الى العوامل
2. اكمال المربع
3. الدستور

سنقوم بمراجعة هذه الطرق وكما في الامثلة الاتية :

مثال (1):- جد بطريقة التحليل الى العوامل مجموعة حلول المعادلات الأتية .

a) $x^2 + 5x = -6$

b) $3x^2 - 5x = 0$

c) $9x^2 = 16$

الحل :-

حل معادلات الدرجة الثانية بطريقة التحليل

a) $x^2 + 5x = -6 \Rightarrow x^2 + 5x + 6 = 0$

بتحليل المعادلة بطريقة التجربة نحصل على :

$(x + 3)(x + 2) = 0$

اما : $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

او : $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$\therefore$ S.s = {-3,-2}

b) $3x^2 - 5x = 0$

نحلل المعادلة بأستخراج العامل المشترك لنحصل على:

$x(3x - 5) = 0$

$3x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$ أو $x = 0$ أما

$\therefore S.s = \{0, \frac{5}{3}\}$

$c)\ 9x^2 = 16 \Rightarrow 9x^2 - 16 = 0$

وبالتحليل الى الفرق بين مربعين نحصل على :-

$(3x - 4)(3x + 4) = 0$

$3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$ اما

$3x + 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$ او

$\therefore S.s = \{-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\}$



مثال (2):- اوجد مجموعة الحل للمعادلة $x^2 + 4x - 5 = 0$ بطريقة اكمال المربع .

الحل :-

$x^2 + 4x - 5 = 0$

$x^2 + 4x = 5$

وبعد اضافة مربع نصف معامل x الى الطرفين نحصل على :

$x^2 + 4x + (\frac{4}{2})^2 = 5 + (\frac{4}{2})^2$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين: $\Rightarrow (x + 2)^2 = 9$

$\therefore x + 2 = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x + 2 = \pm 3$

$x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1$ اما

$x + 2 = -3 \Rightarrow x = -5$ او

$\therefore S.s = \{-5, 1\}$

مثال (3):- جد مجموعة الحل للمعادلة $x^2 + 2x = 4$ بطريقة الدستور ؟

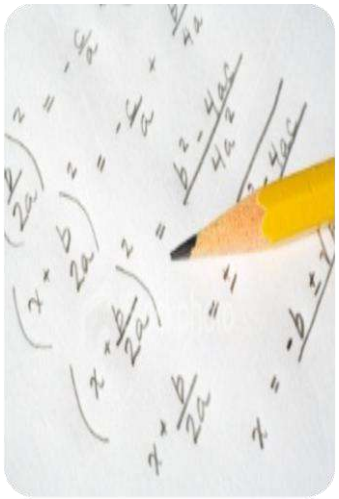
الحل :-

نكتب المعادلة :- $x^2 + 2x = 4$

بالشكل $x^2 + 2x - 4 = 0$

ونقارنها بالمعادلة : $ax^2 + bx + c = 0$

ومن المعادلة نجد ان: $a = 1, b = 2, c = -4$



وبتطبيق صيغة الدستور:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore x = \frac{-2 \pm \sqrt{((2)^2 - 4 \times 1 \times (-4))}}{2 \times 1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = \frac{2(-1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

$$\Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{5}$$

$$x = -1 - \sqrt{5} \quad \text{أما}$$

$$x = -1 + \sqrt{5} \quad \text{او}$$

$$\therefore S.s = \{-1 - \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5}\}$$

ملاحظة

عند استخدام طريقة الدستور في حل المعادلة يجب ملاحظة ما يأتي :

1. اذا كان المميز $b^2 - 4ac > 0$ فان مجموعة الحل للمعادلة هو جذران حقيقيان مختلفان .
2. اذا كان المميز $b^2 - 4ac = 0$ فان مجموعة الحل للمعادلة هو جذران متساويان ، اي يوجد حل واحد للمعادلة .
3. اذا كان المميز $b^2 - 4ac < 0$ فأن مجموعة الحل للمعادلة $\emptyset$ اي ليس للمعادلة حل في مجموعة الاعداد الحقيقية R .

تمـارين[1-2]

1- جد بطريقة التحليل مجموعة الحل لكل من المعادلات الاتية :

a) $16 = x^2 - 6x$
b) $6x^2 + 13x - 5 = 0$
c) $(2x - 3)(x - 1) = 15$

2- جد مجموعة الحل لكل من المعادلات الاتية بطريقة اكمال المربع :

a) $3x^2 + x - 10 = 0$
b) $4x^2 + 5x = 15$

3- جد مجموعة الحل لكل من المعادلات الاتية بطريقة الدستور :

a) $3x^2 - 6x = -2$
b) $x^2 - 4x + 3 = 0$

[2 – 2] الفترات الحقيقية Real Intervals

تعريف [2-1] : الفترات الحقيقية

هي مجاميع جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية R وتكون على عدة انواع ويمكن تمثيلها على خط الاعداد بأشكال مختلفة تعتمد على كون الاعداد الحقيقية تنتمي الى داخل تلك الفترة او خارجها .

[2-2-1] تمثيل الفترات على خط الاعداد الحقيقية

ليكن كل من $a , b \in R$ وان $a < b$ فأن:



شكل (2-1)

1. تسمى مجموعة الاعداد الحقيقية $\{ x : x \in R , a \le x \le b \}$ الفترة المغلقة (Closed Interval) من a الى b ونرمز لها بالرمز $[a,b]$ وتمثيل هذه المجموعة على خط الاعداد الحقيقية. كما في الشكل (2-1)

2. تسمى مجموعة الاعداد الحقيقية $\{ x : x \in R , a < x < b \}$ الفترة المفتوحة (Open Interval) من a الى b ونرمز لها بالرمز (a,b) وتمثيل هذه المجموعة على خط الاعداد الحقيقية . كما في الشكل (2-2)



شكل (2-2)

وقد مثلنا بالدائرتين الممتلئتين في الشكل (2-1) كي نوضح ان كل من a , b هو داخل الفترة اما في الشكل الثاني (2-2) فقد مثلنا كل من a , b بدائرتين مجوفتين حتى نوضح ان كل من a , b هو خارج الفترة.

3. نسمي كلا من المجموعتين :

$$(a , b] = \{ x : x \in R , a < x \le b \}$$

$$[a , b) = \{ x : x \in R , a \le x < b \}$$



شكل (2-3)

بالفترة نصف المغلقة (half closed) او نصف المفتوحة (half open) حيث أن $a < b$ وتمثل المجموعة الاولى في الشكل (2-3) وتمثل المجموعة الاخرى بالشكل (2-4) .



شكل (2-4)

4. مجموعة الاعداد الحقيقية التي تزيد عن العدد الحقيقي a او تساويه هي :

$\{ x : x \in R , x \geq a \}$ ونمثلها على خط الاعداد كما في الشكل (2-5) .



شكل (2-5)

اما مجموعة الاعداد الحقيقية التي تزيد عن العدد الحقيقي a ولا تساويه هي:

$\{ x : x \in R , x > a \}$ ونمثلها على خط الاعداد كما في الشكل (2-6) .



شكل (2-6)

5. مجموعة الاعداد الحقيقية التي تساوي العدد a او اصغر منه هي:

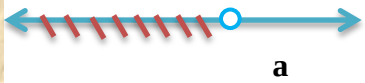
$\{ x : x \in R , x \leq a \}$ ونمثلها على خط الاعداد كما في الشكل (2-7) .



شكل (2-7)

اما مجموعة الاعداد الحقيقية التي هي اصغر من العدد الحقيقي a ولا تساويه هي:

$\{x : x \in R, x < a\}$ ونمثلها على خط الاعداد كما في الشكل (2-8).



شكل (2-8)

مثال (4):- لتكن $X = [2 , 7]$, $Y = [3 , 9]$ مثل على خط الاعداد كل من:

1. $X \cap Y$ 2. $X \cup Y$ 3. $X - Y$ 4. $Y - X$

ثم اكتب النواتج على شكل فترات ؟

الحل:-

1. $X \cap Y = [3 , 7]$ 2. $X \cup Y = [2 , 9]$

3. $X - Y = [2 , 3)$ 4. $Y - X = (7 , 9]$



مثال (5):- جد كل مما ياتي :

$$1.\{x: x \geq -2\} \cup (-4,1]$$

$$2.\{x: x \geq -2\} \cap (-4,1]$$

ثم مثل النواتج على خط الاعداد ؟

الحل :-

$$1.\{x: x \geq -2\} \cup (-4,1] = \{x: x > -4\}$$

$$2.\{x: x \geq -2\} \cap (-4,1] = [-2,1]$$



[2-3]: دالة القيمة المطلقة للعدد الحقيقي من الدرجة الاولى

تعريف [2-2] :

تعرف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي x والتي نرمز لها بالرمز $|x|$ كما يأتي :

$$|x| = \begin{cases} x, & \forall\, x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & \forall\, x < 0 \end{cases}$$

مثال (6):- $|0| = 0 \quad , \quad |-4| = 4 \quad , \quad |3| = 3$

مثال (7):- عبر عن كل مما يأتي باستخدام تعريف القيمة المطلقة :

1. $|x - 5|$ 2. $|2 - \sqrt{8}|$

الحل :-

$$1.\ |x - 5| = \begin{cases} x - 5 , & \forall\, x > 5 \\ 0 , & x = 5 \\ -(x - 5) , & \forall\, x < 5 \end{cases}$$

$$2.\ |2 - \sqrt{8}|$$

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2} > 2 \quad \text{بما ان}$$

$$\therefore\ |2 - \sqrt{8}| = \sqrt{8} - 2 > 0$$

خواص القيمة المطلقة

ومن خلال تعريف القيمة المطلقة نجدها تتمتع بالخواص الأتية:

1. $\forall\, x \in R$ فان $|x| \geq 0$
2. $\forall\, x \in R$ فان $|x| = |-x|$
3. $\forall\, x \in R$ فان $-|x| \leq X \leq |x|$
4. $\forall\, x \in R$ فان $|x|^2 = x^2$
5. $\forall\, x \in R$ فان $|x.y| = |x|.|y|$ وان $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ حيث $y \neq 0$
6. $\forall\, x, y \in R$ فان $|x + y| \leq |x| + |y|$
7. $\forall\, x \in R$ اذا كانت $|x| \leq a$ فأن $-a \leq x \leq a$

مثال (8):-

1. $|3| = 3 > 0\,,\quad |-2| = 2 > 0$

2. $|-5| = |5| = 5$

3. $-|6| \le 6 \le |6|$

   $-|-4| \le -4 \le |-4|$

4. $|7|^2 \le 7^2 = 49$

5. $|5 \times 3| = |15| = 15$

   $|5 \times 3| = |5| \times |3| = 5 \times 3 = 15$

   $|-6 \times 2| = |-12| = 12$

   $|-6| \times |2| = 6 \times 2 = 12$

6. $|5+2| \le |5| + |2|$

   $|-5+2| \le |-5| + |2|$

   $|-3| = 5 + 2 \implies 3 < 7$

7. اذا كان $a = 8$ وأن $x = 3$ فان :

$-a \le x \le a \implies -8 \le 3 \le 8$

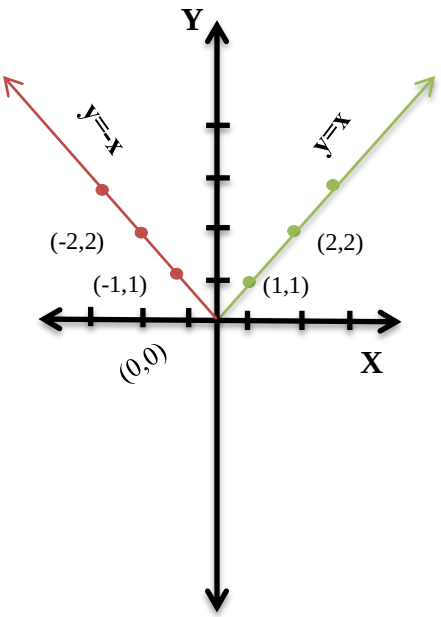
مثال (9):- مثل الدالة $y = |x|$ بيانيا.

الحل :- كما وضحنا في التعريف ان الدالة $y = |x|$ تعرف بالشكل التالي:

$$y = |x| = \begin{cases} x\ , & \forall\, x > 0 \\ 0\ , & x = 0 \\ -x\ , & \forall\, x < 0 \end{cases}$$

اولا : المستقيم $y = x$ عندما $x \geq 0$:

x	y	(x , y)
0	0	(0 , 0)
1	1	(1 , 1)
2	2	(2 ,2)



ثانيا : المستقيم $y = -x$ عندما $x < 0$:

x	y	(x , y)
0	0	(0 , 0)
-1	1	(-1 , 1)
-2	2	(-2 ,2)

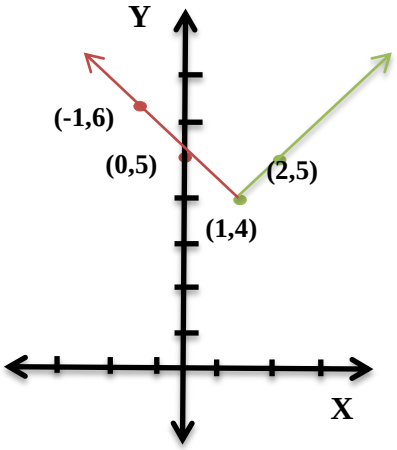
مثال (10):- مثل الدالة $y = |x - 1| + 4$ بيانيا .

الحل :- نعرف الدالة $y = |x - 1| + 4$ باستخدام تعريف القيمة المطلقة :

$$y = \begin{cases} x - 1 + 4 & , \forall x \geq 1 \\ -(x - 1) + 4 & , \forall x < 1 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x + 3 & , \forall x \geq 1 \\ -x + 5 & , \forall x < 1 \end{cases}$$

اولا : الجزء الاول من الدالة هو المستقيم $y = x + 3 \ , \forall x \geq 1$



x	y	(x , y)
1	4	(1 , 4)
2	5	(2 ,5)

ثانيا : الجزء الثاني من الدالة هو المستقيم $y = -x + 5 \ , \forall x < 1$

x	y	(x , y)
0	5	(1 , 4)
-1	6	(-1 ,6)

[2-4] : حل المعادلات التي تحتوي على مطلق

مثال (11):- جد مجموعة الحل للمعادلة .

$$|2x + 4| = 10 \ ; \ \forall x \in R.$$

الحل:- نستنتج من تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي أن:

$$|2x + 4| = \begin{cases} 2x + 4 & , \ x \geq -2 \\ -(2x + 4), & x < -2 \end{cases}$$

ان هذه المعادلة تكافئ :

$2x + 4 = 10$ مجموعة التعويض هي: $\{x : x \in R , x \geq -2\} \ldots (1)$

$-2x - 4 = 10$ مجموعة التعويض هي: $\{x : x \in R , x < -2\} \ldots (2)$

يمكننا ان نعد مجموعتي التعويض اعلاه بنظام معادلتين من الدرجة الاولى بالمتغيرين x , y حيث معامل y فيها يساوي صفر .

وان مجموعة حل هاتين المعادلتين هي $S.s_1 = \{ -7 \}$, $S.s_2 = \{ 3 \}$

∴ مجموعة الحل للمعادلة هي :

$$S.s = S.s_1 \cup S.s_2 = \{ -7 , 3 \}$$

مثال (12):- جد مجموعة حل المعادلة :

$$x^2 \times |x| - 27 = 0 \quad ; \ \forall x \in R$$

الحل: - من تعريف القيمة المطلقة فان المعادلة $x^2 \times |x| - 27 = 0$ تكافئ:

$$1) \ x^3 - 27 = 0 \ , \forall x > 0 \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x = 3$$

$$\therefore \ S.s_1 = \{ 3 \}$$

$$2)\ -x^3 - 27 = 0\ ,\forall\, x < 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = -27 \quad \Rightarrow \quad x = -3$$

$$\therefore S.s_2 = \{-3\}$$

∴ مجموعة الحل للمعادلة هي :

$$S.s = S.s_1 \cup S.s_2 = \{3\ , -3\} = \{-3, 3\}$$

مثال (13):- جد مجموعة حل المعادلة :

$$x^2 + |x| - 12 = 0, \quad \forall\, x \in R$$

الحل: - من تعريف القيمة المطلقة فان المعادلة: $x^2 + |x| - 12 = 0$ تكافئ:

$$1)\ x^2 + x - 12 = 0, \forall x > 0 \quad \Rightarrow \quad (x + 4)(x - 3) = 0$$

اما $x = 3$ او $x = -4$ (يهمل لان $x > 0$ في هذه الحالة)

$$\therefore\ S.s_1 = \{3\}$$

$$2)\ x^2 - x - 12 = 0\ ,\forall\, x < 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 4)(x + 3) = 0$$

اما $x = -3$ او $x = 4$ (يهمل لان $x < 0$ في هذه الحالة)

$$\therefore S.s_2 = \{-3\}$$

∴ مجموعة الحل للمعادلة هي :

$$S.s = S.s_1 \cup S.s_2 = \{3\ , -3\} = \{-3, 3\}$$

تمارين [2-2]

1) مثل كل من المجموعات التالية على خط الاعداد ثم اكتب الناتج على شكل فترة:

لتكن $X = [2, 5]$,$Y = [-1, 6]$ ، ثم جد :

1. $X \cap Y$
2. $X \cup Y$
3. $X - Y$
4. $Y - X$

2) لتكن $X = (-2, 3]$,$Y = [-1, 4)$ فجد:

1. $X \cap Y$
2. $X \cup Y$
3. $X - Y$
4. $Y - X$

3) مثل ما يأتي على خط الاعداد :

1. $\{x : x \in R, x \geq -3\} \cup (-4, 3]$.
2. $\{x : x \in R, x \geq -3\} \cap (-4, 3]$.

4) ارسم كل من الدوال الأتية :

1. $y = |x + 3| - 4$
2. $y = 5 - |x + 3|$

5) جد مجموعة حل كل من المعادلات الاتية ثم تحقق من الحل :

1. $|x^2 + 4| = 29$
2. $x.|x| + 9 = 0$
3. $|x^2 - 2x - 16| = 8$

[2-5] : حل المعادلات الانية من الدرجة الاولى بمتغيرين بأستخدام (التعويض والحذف)

لقد تعلمت عزيزي الطالب في السنة السابقة كيفية حل معادلتين من الدرجة الاولى بمتغيرين بيانيا وكذلك بطريقة الحذف جبريا , والان سوف نقوم بحل معادلتين مرتبطتين بأداة الربط و او اداة الربط أو .

[2-5-1] : حل زوج من المعادلات بمتغيرين من الدرجة الاولى

تعتبر المعادلة $2x + 3y = 16$ معادلة من الدرجة الاولى تحتوي على متغيرين x, y وتسمى معادلة خطية ، نلاحظ ان الزوج المرتب $(5, 2)$ يحقق المعادلة فاذا كان $x = 5$ ، $y = 2$ فممكن كتابة المعادلة السابقة بالشكل التالي :

$$2 \times 5 + 3 \times 2 = 16$$

وبالتالي تصبح عبارة صائبة .

يسمى الزوج $(5, 2)$ الذي يحقق حل هذه المعادلة والازواج المرتبة الاخرى $(0, \frac{16}{3})$ ، $(\frac{1}{2}, 5)$ بحلول المعادلة .

ويمكننا ايجاد ازواج اخرى تحقق هذه المعادلة وذلك باختيار قيمة عددية للمتغير x مثل $x = 3$ ونعوض في المعادلة الاصلية فنحصل على:

$$6 + 3y = 16 \Rightarrow 3y = 16 - 6 \Rightarrow \therefore y = \frac{10}{3}$$

وبذلك يكون الزوج المرتب $(3, \frac{10}{3})$ حل لهذه المعادلة وهكذا ان كل الازواج المرتبة التي تحقق المعادلة تكون مجموعة حلولها $(S.s)$.

لنأخذ المعادلة $x - y = 3$ نلاحظ ان هذه المعادلة تتحقق بعدد غير منته من الازوج المرتبة منها :

$$(6, 3) \ldots\ldots (4, 1) ، (5, 2) ، (2, -1)$$

نلاحظ ان الزوج المرتب $(5,2)$ يحقق كلتا المعادلتين السابقتين في ان واحد ولايوجد زوج مرتب غيره يحقق المعادلتين معا . يسمى هذا الزوج المرتب الذي يحقق المعادلتين في ان واحد حلا للمعادلتين .

ويمكن ايجاد الزوج المرتب الذي يحقق المعادلتين بعدة طرق :

1- طريقة الحذف

اي حذف احد المتغيرين (المجهولين) للحصول على معادلة ذات متغير واحد ثم حلها :

مثال (14):- جد مجموعة الحل للمعادلتين الاتيتين :

$$2x + 3y = 13 \quad \dots (1)$$

$$x - 3y = 2 \quad \dots (2)$$

الحل :

بجمع المعادلتين(1) و(2) اي بجمع الطرف الايسر للمعادلة (1) مع الطرف الايسر للمعادلة (2) والطرف الايمن للمعادلة (1) مع الطرف الايمن للمعادلة (2) نحصل على:

$$3x = 15 \quad \Rightarrow \quad \therefore x = 5$$

نعوض عن قيمة x في احدى المعادلتين السابقتين فنحصل بذلك على قيمة y ، لتكن المعادلة التي نعوض بها هي المعادلة (2) فنحصل على:

$$5 - 3y = 2$$

$$-3y = 2 - 5$$

بقسمة الطرفين على -3 ,

$$-3y = -3$$

$$\therefore y = 1$$

اي ان الزوج المرتب $(5,1)$ يحقق المعادلتين (1) و (2) عليه فان مجموعة الحل للمعادلتين هي :

$$\therefore \quad S.s = \{(5,1)\}$$

مثال (15):- جد مجموعة الحل للمعادلتين الاتيتين :

$$2x + 3y = 17 \quad \dots \quad (1)$$

$$X - y = 1 \quad \dots \quad (2)$$

الحل :-

لحذف x من المعادلتين(1) او (2) نضرب المعادلة (2) في العدد 2 فنحصل على:

$$2x - 2y = 2$$

وبذلك تكون لدينا المعادلتين:-

$$2x + 3y = 17$$

$$2x - 2y = 2$$

وبطرح المعادلتين السابقتين نحصل على :-

$$5y = 15 \quad \Rightarrow \quad \therefore y = \frac{15}{5} = 3$$

وبالتعويض عن قيمة y باحدى المعادلتين (1) و (2) ولتكن المعادلة (2) نحصل على

$$x - 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \therefore x = 4$$

اي ان الزوج المرتب $(4, 3)$ يحقق المعادلتين (1) و (2) عليه فان مجموعة حل المعادلتين هي :

$$\therefore \quad S.s = \{(4, 3)\}$$

2 – طريقة التعويض

تعلمت من خلال المثالين السابقين كيفية حذف المتغير x وذلك بجعل معامل ذلك المتغير متساويا في القيمة العددية في المعادلتين .

المثال الاتي يبين لنا طريقة التعويض و كيفية ايجاد قيمة أحد المتغيرين وذلك بالتعويض عنه بما يساويه بدلالة المتغير الاخر .

مثال (16):- جد مجموعة الحل للمعادلتين الاتيتين بطريقة التعويض :

$$5x + 4y = 8 \quad \dots (1)$$

$$3x - 2y = 7 \quad \dots (2)$$

الحل :-

لنأخذ المعادلة (2) ونحصل منها على :-

$$3x = 7 + 2y \Rightarrow \therefore x = \frac{7+2y}{3}$$

نعوض عن قيمة x بدلالة y في المعادلة (1) فنحصل على :

$$5 \times \frac{7+2y}{3} + 4y = 8$$

بضرب طرفي المعادلة بالعدد 3 نحصل على:

$$35 + 10y + 12y = 24$$

$$22y = 24 - 35 \Rightarrow 22y = -11 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

نعوض عن قيمة $y = -\frac{1}{2}$ في المعادلة (2) فنحصل على :

$$3x - 2 \times (-\frac{1}{2}) = 7$$

$$3x + 1 = 7 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

عليه فان مجموعة حل المعادلتين هي : $\therefore S.s = \{(2, -\frac{1}{2})\}$

مثال (17):- جد مجموعة الحل للمعادلتين الاتيتين بطريقة التعويض :

$$\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 3 \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 1 \quad \dots \quad (2)$$

الحل :-

من المعادلة (1) نحصل على:

$$\frac{2}{x} - 3 = \frac{1}{y} \dots (3)$$

وبتعويض معادلة (3) في المعادلة (2) نحصل على :

$$\frac{3}{x} - 2\left(\left(\frac{2}{x}\right) - 3\right) = 1$$

$$\frac{3}{x} - \frac{4}{x} + 6 = 1 \Rightarrow \frac{(3-4)}{x} + 6 = 1$$

$$\frac{-1}{x} = 1 - 6 \Rightarrow \frac{-1}{x} = -5 \Rightarrow 5x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

وبالتعويض عن قيمة x في المعادلة (1) نحصل على:

$$\frac{2}{(1/5)} - \frac{1}{y} = 3 \Rightarrow 10 - \frac{1}{y} = 3 \Rightarrow \frac{-1}{y} = -7$$

$$\therefore y = \frac{1}{7}$$

عليه فان مجموعة حل المعادلتين هي:

$$\therefore \quad S.s = \left\{\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{7}\right)\right\}$$

مثال (18):- عددان مجموعهما 12 اذا طرح ثلاثة امثال الثاني من خمسة امثال الاول كانت النتيجة 20 فما هما ؟

الحل :-

نفرض أن العدد الاول = x

وأن العدد الثاني = y

بذلك يكون :-

$$x + y = 12 \quad \dots (1)$$

$$5x - 3y = 20 \quad \dots (2)$$

من المعادلة (1) نحصل على :

$$x = 12 - y$$

وبالتعويض عن قيمة x بدلالة y في المعادلة (2) نحصل على :

$$5(12 - y) - 3y = 20 \Rightarrow 60 - 5y - 3y = 20$$

$$60 - 8y = 20 \Rightarrow -8y = 20 - 60 \Rightarrow -8y = -40$$

$$\therefore y = 5$$

وبالتعويض عن قيمة y في المعادلة (1) نحصل على :

$$x + 5 = 12 \Rightarrow x = 7$$

تمارين [2-3]

جد مجموعة حل كل زوج من ازواج المعادلات الأتية :

1) $5x - 2y = 16$

$3x + 4y = 17$

2) $15x - 10y = 20$

$12x + y + 2 = 0$

3) $2(x + y) = 24 - x$

$3(x + 2y) = 9y + 7 - x$

4) $x + y = 11$

$3x - 2y = 0$

5) $12x + 3y = 6$

$7y + 14 = 28x$

6) $\frac{(x-1)}{3} + y = 6$

$7x + 3y = 5$

7) $\frac{5}{3x} + \frac{3}{5y} = \frac{8}{15}$

$\frac{7}{4x} + \frac{6}{5y} = \frac{3}{4}$

8) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y-1} = 0.7$

$\frac{4}{x} + \frac{2}{y-2} = \frac{1}{15}$

9) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} = 0$

$\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{y} = 0$

10) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2$

$\frac{x}{3} + \frac{y}{9} = 1$

11) $0.5x + 0.03y = 1.75$

$0.5x - 0.05y = 11.25$

12) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = 5$

$2x + y = 1$

13) $6x + \frac{2x-5y}{7} = 24$

$4x + \frac{2x-5}{3} = 54$

14) $\frac{3}{4x+5y+6} = \frac{8}{x-2y+3}$

$\frac{4}{3x+2y+1} = \frac{3}{6y+5y-4}$

[2-6] : حل معادلتين احداهما من الدرجة الاولى والاخرى من الدرجة الثانية بالتعويض



اذا اعطيت لنا معادلتين بالمتغيرين $y،x$ وكانت احداهما من الدرجة الاولى والاخرى من الدرجة الثانية سوف نستخدم طريقة التعويض لحل هاتين المعادلتين وعلى الاغلب نعوض المعادلة من الدرجة الاولى في المعادلة من الدرجة الثانية ونكمل الحل بنفس الخطوات السابقة التي استخدمناها لحل معادلتين من الدرجة الاولى .

مثال (18):- جد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين :

$$x + 2y = 4 \ \ldots \ (1)$$

$$x^2 - y^2 = 3 \ \ldots \ (2)$$

الحل :-

من معادلة رقم (1) نجد x بدلالة y ونعوضها في معادلة (2) :

$$x = 4 - 2y \ \ldots \ (3)$$

نعوض معادلة رقم (3) في معادلة رقم (2) ينتج :



$$(4 - 2y)^2 - y^2 = 3 \Rightarrow 16 - 16y + 4y^2 - y^2 = 3$$

$$\Rightarrow 3y^2 - 16y + 13 = 0 \Rightarrow (y - 1)(3y - 13) = 0$$

$$(y - 1) = 0 \Rightarrow y = 1 \qquad \text{اما :}$$

وبالتعويض عن قيمة y في معادلة (3) نحصل على :

$$x = 4 - 2(1) = 2 \Rightarrow \therefore x = 2$$

$$(3y - 13) = 0 \Rightarrow y = \frac{13}{3} \qquad \text{او :}$$

وبالتعويض عن قيمة y هذه في معادلة (3) نحصل على :

$x = 4 - 2\left(\frac{13}{3}\right)$ ⇒ $\therefore x = -\frac{14}{3}$

عليه فان مجموعة الحل هي :

$$\therefore \quad S.s = \left\{\left(-\frac{14}{3}, \frac{13}{3}\right), (2,1)\right\}$$

مثال (19):- جد مجموعة حل المعادلتين الأتيتين :

$x + y = 5 \quad \ldots \quad (1)$

$x^2 + y^2 = 17 \quad \ldots (2)$

الحل :-

من معادلة (1) نجد قيمة x بدلالة y :

$x = 5 - y \quad \ldots \quad (3)$

نعوض معادلة (3) في معادلة (2) نحصل على :

$(5 - y)^2 + y^2 = 17$

$25 - 10y + y^2 + y^2 = 17$

$2y^2 - 10y + 8 = 0$

وبعد القسمة على العدد (2) ومن التحليل الى العوامل نحصل على :

$y^2 - 5y + 4 = 0$ ⇒ $(y - 1)(y - 4) = 0$

$(y - 1) = 0$ ⇒ $y = 1$ اما :

وبالتعويض عن قيمة y في معادلة (3) نحصل على :

$x = 5 - 1 = 4$ ⇒ $\therefore x = 4$

$(y-4)=0 \Rightarrow y=4$ او :

وبالتعويض عن قيمة y هذه في معادلة (3) نحصل على :

$x=5-4=1 \Rightarrow \therefore x=1$

عليه فان مجموعة الحل هي :

$\therefore S.s=\{(4,1),(1,4)\}$

مثال (20) :- جد مجموعة حل المعادلتين الاتيتين :

$3x+2y=12 \ldots (1)$

$xy=6 \ldots (2)$

الحل :

نجد قيمة x بدلالة y من المعادلة الثانية ونعوضها في المعادلة الاولى وكما يلي:

$xy=6 \Rightarrow x=\frac{6}{y} \ldots (3)$

نعوض معادلة (3) في معادلة (1) نحصل على :

$3(\frac{6}{y})+2y=12$

نتخلص من الكسر في المعادلة وذلك بضرب المعادلة في (y) فيكون :

$18+2y^2=12y$

وبترتيب المعادلة وقسمتها على 2 نحصل على :

$y^2-6y+9=0$

ومن التحليل الى العوامل نحصل على:

$$(y-3)(y-3) = (y-3)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3$$

نعوض عن قيمة y في معادلة (3) نحصل على :

$$x = \frac{6}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

عليه فان مجموعة الحل هي :

$$\therefore \quad S.s = \{(2,3)\}$$

تمارين [2-3]

1 - جد مجموعة حل كل زوج من ازواج المعادلات الاتية :

1) $x + y = 3$

$3x + 5y = 5$

2) $x - y = -6$

$9x + y = -4$

3) $2x + 3y = 17$

$3x - 2y = 6$

2- جد مجموعة حل كل زوج من ازواج المعادلات الآتية:

1) $x + y = 8$

$x^2 + y^2 = 16$

2) $2x + 3y = 13$

$3x^2 + 2y^2 = 30$

3) $2x - y = 7$

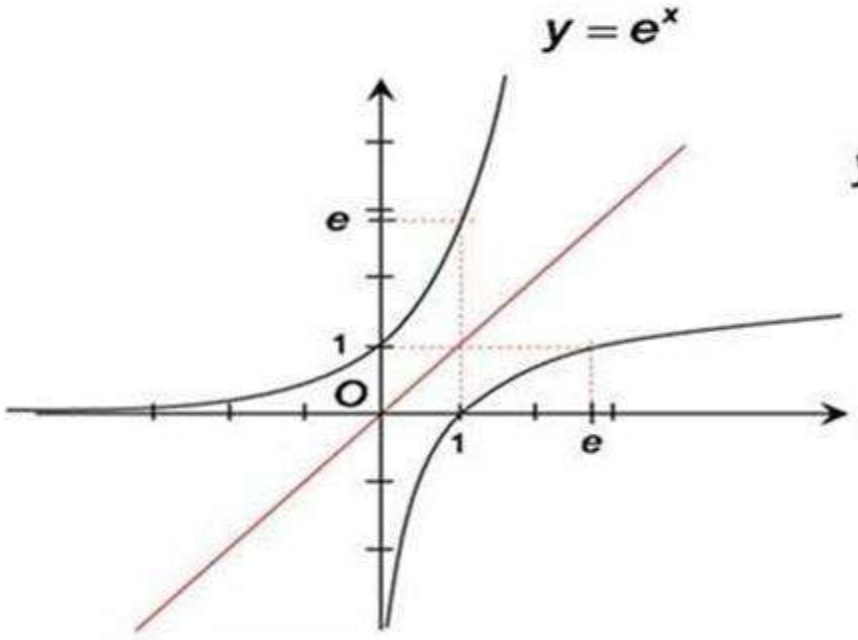
$xy = 15$

4) $3x + y = 11$

$xy + x^2 + y = 19$

3

الفصل الثالث
الدوال
الأسية واللوغاريتمية



الفصل الثالث : الدوال الأسية واللوغاريتمية
Exponential and Logarithmic Functions

3

المحتوى العلمي للفصل:

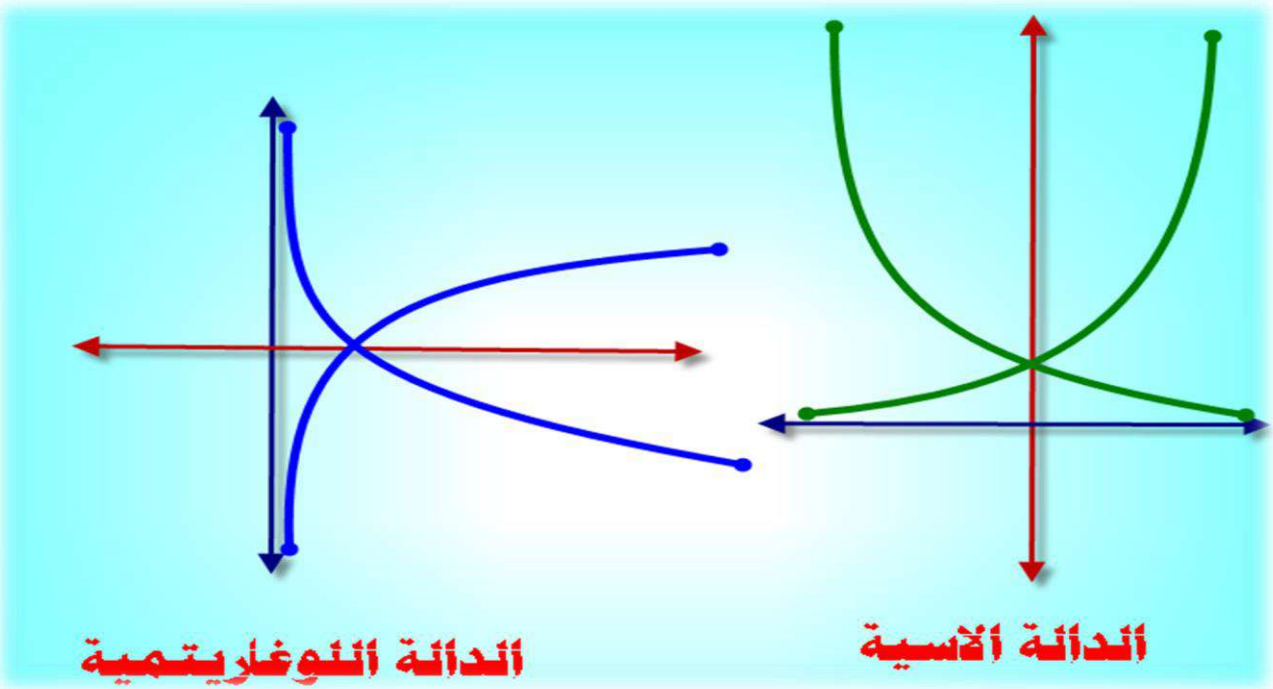
[3-1]: الدالة الأسية، تعريفها ومراجعة لقوانين الاسس.

[3-2]: لوغاريتم العدد لاي اساس .

[3-3]: قوانين اللوغاريتمات.

[3-4]: لوغاريتم العدد للاساس 10 .

[3-5]: حل بعض المعادلات اللوغاريتمية البسيطة .



الأهداف السلوكية

ينبغي ان يصبح الطالب في نهاية دراسته لهذا الفصل قادرا على :

- ان يتقن قوانين الأسس ومعنى الأس الكسري .
- أن يمكنه تمييز الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية عن غيرها من الدوال الحقيقية .
- أن يعرف كيفية استخراج مجموعة الحلول للمعادلات الأسية واللوغاريتمية .
- أن يدرك الحاجة لمفهوم اللوغاريتم وكيفية استخراج لوغاريتمات الاعداد لأي اس .
- أن يتعرف على اللوغاريتمات العشرية للأعداد والتي تمثل قوى صحيحة للعدد 10.
- أن يتعرف على خواص او قوانين اللوغاريتمات .
- أن يتمكن من تمييز الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها بيانيا وعلاقتها بالدالة الأسية .

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
❖ الدالة الأسية	$f_{a(x)=a^x}$
❖ الدالة اللوغاريتمية	$y = \log_a x$
❖ اللوغاريتمات العشرية	$y = \log x$
❖ الاعداد الحقيقية غير السالبة	R^+
❖ الاعداد الحقيقية الموجبة	R^{++}

المقـدمــة

تعلمت عزيزي الطالب في السنوات السابقة معنى كلمة الأس او مفهوم الأس و كذلك تعرفت على التطبيق وأنواعه الشامل , المتباين والتقابل . وفي هذه السنة سوف تتعرف على تطبيقات اخرى في المستوي الاحداثي وعلى الاعداد الحقيقة والتي تسمى الدوال الحقيقية ومن هذه الدوال الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية , ماهيتها , تمثيلها بيانيا , تطبيقاتها في الحياة العملية . فمن تطبيقات الدالة الاسية هي المعادلات الاسية ، اما بالنسبة للدالة اللوغاريتمية فنظرا لاهميتها في تبسيط الحسابات المعقدة للعلوم الطبيعية والهندسية وكذلك هي تدخل كأساس في الحسابات التجارية (الربح والخسارة والفائدة) حيث الفكرة التي تقوم عليها اللوغاريتمات هي تحويل الاعداد على شكل أس والتعامل معها عوضا عن الاعداد الاصلية وتستخدم في مجالات عديدة :



صورة لريختر ومقياسه

- استخدامه في قياس قوة الزلزال على مقياس ريختر.
- يستخدم في قياس شدة الصوت بالديسيبل .
- في حساب سرعة الصواريخ .
- يصف الرقم الهيدروجيني (PH) للمادة اي درجة حموضة المادة وتحسب باستخدام اللوغاريتمات للأساس 10 .
- في الاحصاء يستخدم في حساب الفائدة المركبة المستمرة a حيث :

$$a = Me^{R\times N}$$

M: المبلغ المستثمر، R : الفائدة ، N : عدد السنوات .



جهاز قياس شدة الصوت





[3-1] الدالة الأسية , تعريفها ومراجعة لقوانين الأسس .

[3-1-1] مفهوم الأس , تعريفه , بعض خواصه

لقد تعلمت عزيزي الطالب من دراستك السابقة بانه يمكن التعبير عن الضرب المتكرر لعدد معين بطريقة مختصرة فمثلا :

$5^6 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

وتقرأ 5 للأس 6 حيث تضرب ال 5 في نفسها 6 مرات وعليه فان :

$x^4 = x.x.x.x$

وتقرأ x للأس 4 حيث تضرب x في نفسها 4 مرات وبصورة عامة :

تعريف[3-1] :-

$a^n = a \times a \times a \ldots \ldots \times a$ الى n من المرات

حيث a عدد حقيقي , وان n عدد صحيح موجب ويقرأ a^n: a للأس n ويطلق على العدد a أساس وعلى n بالأس.

ملاحظة

1- اذا كان a عددا موجبا اي ان $a > 0$ فان :
a^n يكون عددا موجبا في حالة كون الأس n فرديا او زوجيا
مثلا : $3^2 = 9$ ، $2^5 = 32$

2- اذا كان a عددا سالبا اي ان $a < 0$ فان :

$$a^n = \begin{cases} \text{يكون عددا موجبا اذا كان } n \text{ زوجي} \\ \text{يكون عددا سالبا اذا كان } n \text{ فردي} \end{cases}$$

مثلا : $(-2)^6 = 64$ ، $(-3)^3 = -27$

3- اذا كان a عددا حقيقيا وان n=1 فان : $a^n = a^1 = a$

4- اذا كان a عددا حقيقيا و $a \neq 0$ وان n=0 فان : $a^n = a^0 = 1$

[3-1-2] قوانين الأسس عندما تكون اعداد صحيحة موجبة او نسبية

أولا : **قانون الضرب**:-

اذا كان كل من $n, m \in Q$ وكان $a \in R$ فان :

$a^n . a^m = a^{n+m}$ (عند الضرب تجمع الأسس)

مثال(1):- $7^2 \times 7^3 = 7^{2+3} = 7^5$

ثانيا : **قانون القسمة**:-

اذا كان كل من $n, m \in Q$ وكان $a \in R$ حيث $a \neq 0$ فان :

$$\frac{a^n}{a^m} = \begin{cases} a^{n-m} & \text{عندما } n > m \\ \frac{1}{a^{m-n}} & \text{عندما } m > n \end{cases}$$

مثال(2):-

1. $\frac{x^{17}}{x^4} = x^{13}$
2. $\frac{y^5}{y^{12}} = \frac{1}{y^7}$
3. $\frac{x^6}{x^6} = 1$

مثال(3):- اختصر المقدار : $\frac{x^5 \times y^3 \times x^4}{x^3 \times y \times y^6}$

الحل:- $\frac{x^9 \times y^3}{x^3 \times y^7} = \frac{x^6}{y^4}$

ثالثا : قانون الرفع :-

اذا كان كل من $n, m \in Q$ وكان $a \in R$ فان :

(عند الرفع تضرب الأسس) $(a^n)^m = a^{nm}$

مثال(4):- $(8^2)^3 = 8^6$

مثال(5):- $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^5\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$

نتيجة 1

$$(a^n)^m = (a^m)^n$$

مثال(6):- $(7^2)^4 = (7^4)^2 = 7^8$

نتيجة 2

$a, b \in R$ وكان $n \in Q$ فان :

1) $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (حيث ان $b \neq 0$)

مثال(7):-

1) $(a^3 \times b^4)^5 = a^{15} \times b^{20}$

2) $\left(\frac{a^4}{b^5}\right)^6 = \frac{a^{24}}{b^{30}}$

[3-1-3] الأس الكسري - قوانين الأسس عندما تكون أعداد نسبية

تعريف [3-2] :-

$n \in Q$ ، وكان $a \in R$ حيث $a \neq 0$ فان : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

مثال(8):- $a^{-3}=\frac{1}{a^3}$, $7^{-5}=\frac{1}{7^5}$

مثال(9):- $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^{-4}=\frac{a^{-8}}{b^{-12}}=\frac{\frac{1}{a^8}}{\frac{1}{b^{12}}}=\frac{b^{12}}{a^8}$

تعريف [3-3] :-

اذا كان $a\in R^+$ وان $n\in Z^+/\{1\}$ فان :

الرمزين $\sqrt[n]{a}$ و $a^{\frac{1}{n}}$ يعني الجذر النوني الموجب للعدد a

مثال(10):-

1. $\sqrt[3]{x^6}=x^{\frac{6}{3}}=x^2$
2. $\left(\sqrt[4]{7}\right)^5=\left(7^{\frac{1}{4}}\right)^5=7^{\frac{5}{4}}$
3. $\left(\sqrt{a^3b^4}\right)^3=\left(a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{4}{2}}\right)^3=\left(a^{\frac{3}{2}}\ b^2\right)^3=a^{\frac{9}{2}}\ b^6$

مثال(11):-

اذا كان $n,m\in Z$ فاثبت ان : $\frac{125\times 15^{m-2}\times 25^{m+n}}{75^m\times 5^{2n+m}}=\frac{5}{9}$

الحل : - نأخذ الطرف الايسر

$$\frac{125\times 15^{m-2}\times 25^{m+n}}{75^m\times 5^{2n+m}}=\frac{5^3\times(5\times 3)^{m-2}\times(5^2)^{m+n}}{(3\times 5^2)^m\times 5^{2n+m}}$$

$$=\frac{5^3\times 5^{m-2}\times 3^{m-2}\times 5^{2m+2n}}{3^m\times 5^{2m}\times 5^{2n+m}}=5^{3+m-2+2m+2n-2m-2n-m}\times 3^{m-2-m}$$

$=5\times 3^{-2}=\frac{5}{3^2}=\frac{5}{9}$ الطرف الايمن

مثال(12):- اختصر المقدار التالي الى ابسط صورة :

$$\frac{3^{2+n}+3^{n+1}}{3^{n}-3^{n-1}}$$

الحل :-

$$\frac{3^2\times3^n+3^n\times3^1}{3^n-3^n\times3^{-1}}=\frac{3^n[3^2+3]}{3^n[1-3^{-1}]}=\frac{9+3}{1-\frac{1}{3}}=\frac{12}{\frac{2}{3}}$$

$$=12\times\frac{3}{2}=18$$

تمـــارين [1-3]

1) جد قيمة كل مما يأتي :

a) $\frac{(10)^2(6)^3(-5)^{-3}}{(35)^3(9)^{-1}}$

b) $\left(\sqrt[5]{16}\right)^{-\frac{5}{2}}$

c) $6\sqrt[4]{\frac{1}{9}}-2\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{27}-2\sqrt[3]{24}$

d) $\frac{5\times3^{n-1}-3}{3^{n+1}+2\times3^{n-1}}$

e) $\frac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt{4}\times\sqrt[4]{64}}{\sqrt[3]{2}}$

2) اثبت كل مما يأتي :

a) $\left[\frac{4^{n+1}\times2^{-n}}{4^{n(n-1)}}\div\frac{8^{n+1}}{4^{(n+1)(n-1)}}\right]^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$

b) $\frac{5\times3^{2n}-4\times3^{2n-1}}{2\times3^{2n+1}-3^{2n}}=\frac{11}{15}$

c) $\frac{81^{n+1}}{9^{2n}\times243+27^{n-1}\times3^{n+6}}=\frac{3}{10}$

★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★

[3-1-4] الدالة الأسية - تعريفها - خواصها - تمثيلها بيانيا

تعريف [3-4] :- الدالة الأسية

تعرف الدالة الأسية $f_a(x)$ بانها تطبيق تقابل من R الى R^{++} ومعرفة بالقاعدة الاتية :

$f_a(x)=a^x$ حيث ان $a\in R^+\setminus\{1\}$ وان $x\in R$

مثال(13):-

1) $f_7(x)=7^x$

2) $f_{\sqrt{5}}(x)=(\sqrt{5})^x$

3) $f_{\frac{3}{4}}(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x$

ملاحظة

اذا كان $a=1$ فان:

$f_1(x)=1^x$ اي انها دالة ثابتة لذلك استبعدنا $a=1$.

مثال(14):- $f: R \to R^{++}$ $f(x) = 2^x$ المعرفة بالقاعدة

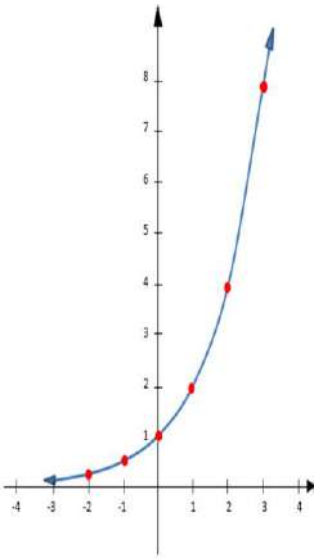
الجدول (3-1) يعطينا بعض الازواج المرتبة لبيان الدالة f .

x	3	2	1	0	-1	-2	-3
f(x)	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

الجدول (3-1)

ان كل زوج مرتب $(x, 2^x)$ يعين نقطة في المخطط البياني للدالة f .

وبتمثيل الازواج المرتبة في المستوي الاحداثي نحصل على الشكل (3-1) والذي يمثل جزءا من التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^x$.



الشكل (3-1)

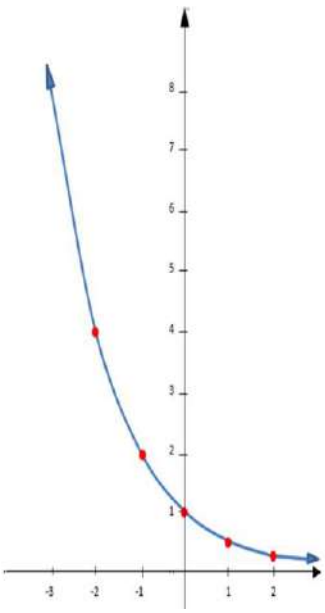
مثال(15):- $f: R \to R^{++}$ $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ حيث ان

الجدول (3-2) يعطينا بعض الازواج المرتبة لبيان الدالة f

x	3	2	1	0	-1	-2	-3
f(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

الجدول (3-2)

ان كل زوج مرتب $(x , 2^{-x})$ من الجدول (3-2) يعين نقطة في المخطط البياني للدالة f .
وبتمثيل هذه الازواج المرتبة في المستوي الاحداثي نحصل على الشكل (3-2) والذي يمثل جزءا من التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2^{-x}$.



الشكل (3-2)

بعض خواص الدالة الاسية : $f_a(x) = a^x$

اذا قمنا برسم منحنيات الدوال $f_2(x)\,,f_3(x)\ ,\ f_4(x)\,,\ldots\ldots$

وكذلك الدوال $f_{\frac{1}{2}}(x)\,,f_{\frac{1}{3}}(x)\ ,\ f_{\frac{1}{4}}(x)\,,\ldots\ldots$

فسوف نجد مجموعتين من المنحنيات :

الاولى : عندما $a > 1$ تتزايد قيم الدالة $f_a(x)$ كلما تزايدت قيمة x .

الثانية : عندما $0 < a < 1$ تتناقص قيم الدالة $f_a(x)$ كلما تزايدت قيمة x .

وبالرجوع الى المنحني البياني لأية دالة اسية $f_a(x)$ حيث $a \neq 1$ نجد ان مجالها هو R ومجالها المقابل هو R^{++} وكذلك نلاحظ ان مدى الدالة يساوي مجالها المقابل وان كل عنصر $y \in R^{++}$ اي (المدى) هو صورة لعنصر واحد فقط من R اي ان الدالة الاسية هي دالة تقابل (شاملة ومتباينة) وعليه فان :

$$a^{x_1} = a^{x_2} \iff x_1 = x_2$$

[3-1-5] المعادلات الأسية وطريقة حلها

مثال (16):- جد قيمة x فيما يلي : $128^x = 2^{x+\frac{1}{2}}$

الحل : - نكتب المعادلة المعطاة بالشكل التالي: $2^{7x} = 2^{x+\frac{1}{2}}$

وحيث ان الدالة الاسية تقابل (كما وضحنا قبل قليل) فان :

$$2^{7x} = 2^{x+\frac{1}{2}} \implies 7x = x + \frac{1}{2} \implies 6x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad x = \frac{1}{12}$$

مثال (17):- حل كل من المعادلات الأسية التالية :

1. $5^{x+3} = 6^{x+3}$
2. $3^{2x^2-8} = 7^{2x^2-8}$

الحل : -

(عندما تكون الاساسات مختلفة في معادلة اسية الطرف الايمن يساوي الطرف الايسر يكون هناك حل واحد فقط لهذه المعادلة اي عندما تكون الاسس = صفر)

1. $5^{x+3} = 6^{x+3} \implies 5^0 = 6^0 = 1$

أي أن:

$x + 3 = 0 \implies x = -3$

2. $3^{2x^2-8} = 7^{2x^2-8} \implies 3^0 = 7^0 = 1$

أي أن:

$2x^2 - 8 = 0 \implies 2x^2 = 8 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2$

تمـــــارين [3-2]

1) حل كلا من المعادلات الاسية الآتية :

a) $2^{x^2-47} = \frac{1}{8}$

b) $4^x + 32 = 3 \times 2^{x+2}$

c) $4^{x+1} = 9 \times 2^x - 2$

d) $25^x + 25 = 26 \times 5^x$

2) حل كلا من المعادلات الاسية الآتية :

a) $7^{x+2} = 3^{x+2}$

b) $5^{x^2-x} = 25$

c) $2^{3x^2-12} = 3^{3x^2-12}$

d) $6^{2x-3} = 1$

[3-2]: لوغاريتم العدد لاي اساس

[3-2-1] الدالة اللوغاريتمية تعريفها , تمثيلها بيانيا

كما اوضحنا سابقا في هذا الفصل ان الدالة الأسية $f(x): R \to R^{++}$

حيث أن: $f_a(x) = a^x$

هي دالة تقابل و يكون لهذه الدالة دالة عكسية وهي تقابل ايضا وتكون بالشكل :

$f_a^{-1}: R^{++} \to R$ حيث ان $a \neq 1$, $a > 0$

مجالها هو المجال المقابل للدالة الأسية اي R ومجالها المقابل codomain هو مجال Domain الدالة الأسية اي R . وهذه الدالة تسمى بالدالة اللوغاريتمية Logarithmic function .

تعريف [3-5] :

يرمز للدالة العكسية للدالة $y = a^x$ بالرمز $x = \log_a y$ ونقول ان x هو لوغاريتم y للأساس a ويمكننا ان نكتب العلاقة بالشكل :

$y = a^x \iff x = \log_a y$ حيث $y \in R^{++}$, $x \in R$, وان $a > 0$, $a \neq 1$

مثال(18):- اكتب $64 = 2^6$ بالصورة اللوغاريتمية .

الحل :

$y = a^x$ يكافىء $64 = 2^6$ صورة اسية

$x = \log_a y$.'. يكافىء $6 = \log_2 64$ صيغة لوغاريتمية

مثال(19):- اكتب $\log_3 81 = 4$ بالصورة الاسية .

الحل:

$x = \log_a y$ يكافىء $\log_3 81 = 4$

$\therefore\ y = a^x$ يكافىء $3^4 = 81$ صورة اسية

مثال(20):- اكتب $\log_{10} 0.001 = -3$ بالصورة الاسية .

الحل:

$\log_a y = x$ يكافىء $\log_{10} 0.001 = -3$ صورة لوغارتمية

$\therefore\ y = a^x$ يكافىء $0.001 = 10^{-3}$ بالصورة الاسية

وكما اسلفنا في البنود السابقة ان الدالة الاسية تقابل فان لها دالة عكسية (f^{-1}) وهي الدالة اللوغاريتمية وهي تقابل ايضا . ولتوضيح ذلك , الجدول ادناه (3-3) يمثل بعض الازواج المرتبة للدالة الاسية $y = 2^x$

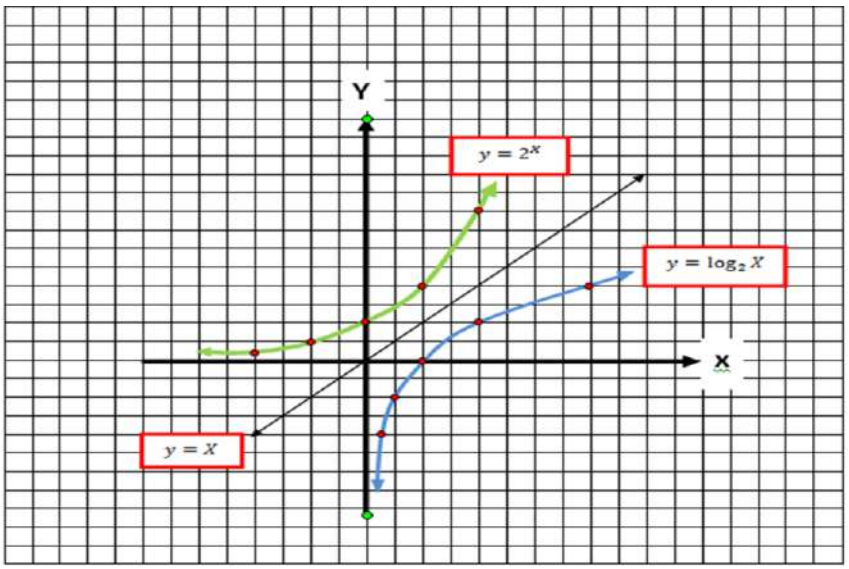
x	2	1	0	-1
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$

الجدول (3-3)

وبالاعتماد على النقاط $\left\{(2,4),(1,2),(0,1),\left(-1,\frac{1}{2}\right)\right\}$ رسمنا المنحني البياني للدالة $y = 2^x$ في الشكل (3-1) سابقا .

ويمكن رسم المنحني البياني للتقابل العكسي بالاعتماد على نظائر هذه النقاط والتي هي :

$\left\{(4,2),(2,1),(1,0),\left(\frac{1}{2},-1\right)\right\}$ والشكل (3-3) يوضح ذلك .



الشكل (3-3)

[3-3] : قوانين اللوغاريتمات

[3-3-1]: اهم خواص اللوغاريتم

1) لكل عدد حقيقي موجب يوجد لوغاريتم .

2) ليس للعدد الحقيقي السالب لوغاريتم .

3) بما ان الدالة اللوغاريتمية تقابل فان :

$$\forall x, y \in R^{++} \qquad x = y \iff \log_a x = \log_a y$$

4) لما كان $a > 0 , a \neq 1$ فان لكل $x, y \in R^{++}$ سنقبل القواعد الاتية بدون برهان :

A) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

B) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

C) $\log_a x^n = n \log_a x \quad , \quad \forall n \in R$

D) $\log_a a = 1$

E) $\log_a 1 = 0$

مثال(21):- اثبت ان :

$$\log_b \frac{6}{5} + \log_b \frac{5}{66} - \log_b \frac{132}{121} + \log_b 12 = 0$$

الحل : نأخذ الطرف الايسر

$$\log_b \frac{\frac{6}{5} \times \frac{5}{66} \times 12}{\frac{132}{121}} = \log_b \frac{12}{11} \times \frac{121}{132} = \log_b \frac{11}{11}$$

$\therefore \quad \log_b 1 = 0$ الطرف الايمن

مثال(22):-

اذا علمت ان $\log_{10} 2 = 0.3010$ فجد لوغارتمات الاعداد التالية :

1) $\log_{10} 8 = \log_{10} 2^3 = 3 \log_{10} 2 = 3 \times 0.3010 = 0.9030$

2) $\log_{10} 64 = \log_{10} 2^6 = 6 \log_{10} 2 = 6 \times 0.3010 = 1.8060$

3) $\log_{10} \sqrt[3]{4} = \log_{10} 2^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \times 0.3010 = \frac{0.6020}{3} \cong 0.2007$

4) $\log_{10} \frac{1}{32} = \log_{10} 2^{-5} = -5 \log_{10} 2 = -5 \times 0.3010$

$= -1.5050$

مثال(23):-

جد قيمة x اذا كان : $\log_{10} \sqrt{x} + \log_{10} \sqrt[3]{x} + \log_{10} \sqrt[4]{x} = \frac{13}{12}$

الحل :

$$\log_{10} x^{\frac{1}{2}} + \log_{10} x^{\frac{1}{3}} + \log_{10} x^{\frac{1}{4}} = \frac{13}{12}$$

$$\frac{1}{2}\log_{10} x + \frac{1}{3}\log_{10} x + \frac{1}{4}\log_{10} x = \frac{13}{12}$$

$$\frac{13}{12}\log_{10} x = \frac{13}{12} \qquad \log_{10} x = 1 \qquad x = 10$$

$$\therefore S.s = \{10\}$$

تمـــارين [3-3]

1. جد قيمة x لكل مما يأتي :

a) $\log_{10} x = 5$ b) $\log_x 16 = -4$ c) $\log_{10} 0.00001 = x$

2. اكتب الصيغة الاخرى لكل مما يأتي :

a) $(0.01)^2 = 0.0001$ b) $\log_3 81 = 4$ c) $\frac{1}{25} = 5^{-2}$

3. جد قيمة كل مما يأتي :

a) $\log_{10} \frac{40}{9} + 4\log_{10} 5 + 2\log_{10} 6$

b) $\log_{10} 8 + \log_{10} 125 - 3\log_{10} 20$

c) $\log_2 \frac{1}{32} + \log_2 18 - \log_2 9$

4. برهن ان :

a) $\frac{\log_{10}\sqrt{125}+\log_{10}\sqrt{27}-\log_{10}\sqrt{8}}{\log_{10}15-\log_{10}2}=\frac{3}{2}$

b) $\frac{\log_{10}0.04-2\log_{10}0.3}{1-\log_{10}15}=2$

5. حل كلا من المعادلات الاتية :

a) $\log_2(2x-5)-\log_2(x+3)=0$

b) $2\log_3 x-\log_3(2x+8)=0$

c) $\log_x 2+\log_{x^2}2+\log_{x^3}2=\frac{11}{3}$

★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★

[3-4] : اللوغاريتمات العشرية Decimal Logarithms

سبق وان درست اللوغاريتم لأي أساس $a>0$, $a\neq 1$ والان ستتعرف على لوغاريتم أساسه $a=10$ يسمى اللوغاريتم العشري او (اللوغاريتم الاعتيادي Common logarithm) وقد اتفق على عدم كتابة الأساس (10)حين استعماله . فمثلا : $\log_{10}7$ يكتب $\log 7$, $\log_{10}0.06$ يكتب $\log 0.06$, $\log_{10}x$ يكتب $\log x$.

[3-5]:حل بعض المعادلات اللوغاريتمية البسيطة

مثال(23):- اثبت ان:

$$\log_2\left(\frac{17}{5}\right)-\log_2\left(\frac{34}{45}\right)+2\log_2\left(\frac{2}{3}\right)=1$$

الحل :

$\log_2\left(\frac{17}{5}\right)-\log_2\left(\frac{34}{45}\right)+\log_2\left(\frac{2}{3}\right)^2$ الطرف الايسر =

$\log_2\left(\frac{17}{5}\times\frac{45}{34}\times\frac{4}{9}\right)$ وبعد الاختصار $\Longrightarrow$ $\log_2 2=1$ الطرف الايمن

مثال(24):- حل المعادلات الاتية :

1) $\log_3 x=4 \Longrightarrow x=3^4 \Longrightarrow x=81 \Longrightarrow S.s.=\{81\}$

2) $\log_x 343=3 \Longrightarrow 343=x^3 \Longrightarrow 7^3=x^3$

$\therefore \quad x=7 \Longrightarrow S.s=\{7\}.$

3) $\log_5\left(\frac{1}{125}\right)=x \Longrightarrow \frac{1}{125}=5^x \Longrightarrow 5^{-3}=5^x$

$\therefore \quad x=-3 \Longrightarrow = S.s.=\{-3\}$

4) $\log_x 64=6 \Longrightarrow 64=x^6 \Longrightarrow 2^6=x^6$

$\therefore x=\pm 2 \Longrightarrow S.s=\{2\}$ (لأنه لا يوجد لوغاريتم للأعداد السالبة)

مثال(25):-

اذا علمت ان $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$ فجد قيمة كل من :

1) $\log 6$ 2) $\log 50$ 3) $\log 72$

الحل :

1) $\log 6 = \log(2 \times 3) = \log 2 + \log 3$

$= 0.3010 + 0.4771 = 0.7781$

2) $\log(50) = \log\left(\frac{100}{2}\right) = \log 10^2 - \log 2$

$= 2\log 10 - \log 2 = 2 \times 1 - 0.3010$

$= 2 - 0.3010 = 1.6990$

3) $\log 72 = \log(8 \times 9) = \log(2^3 \times 3^2) = \log 2^3 + \log 3^2$

$= 3\log 2 + 2\log 3 = 3 \times 0.3010 + 2 \times 0.4771$

$= 0.9030 + 0.9542 = 1.8572$

مثال(26):- جد قيمة كل مما يأتي :

1) $\log\frac{7}{4} + \log\frac{5}{21}$

2) $\log 0.3$

3) $\log 60$

الحل :

1) $\log\left(\frac{7}{4}\times\frac{5}{21}\right)=\log\frac{5}{12}$ نضرب في $\frac{2}{2}$ نحصل على

$$\log\frac{10}{24}=\log 10-\log 24=1-\log(2^3\times 3)$$

$$=1-(3\log 2+\log 3)$$

$$=1-(3\times 0.3010)+0.4771)$$

$$=1-(0.9030+0.4771)=-0.3801$$

2) $\log 0.3=\log(3\times 10^{-1})=\log 3+\log 10^{-1}$

$$=0.4771-1=-0.5229$$

3) $\log 60=\log(10\times 6)=\log(10\times 3\times 2)$

$$=\log 10+\log 3+\log 2$$

$$=1+0.4771+0.3010$$

$$=1.7781$$

تمـــارين [3-4]

1) اذا كان $\log 2 = 0.3010$ و $\log 3 = 0.4771$ فجد كلا من :

a) $\log 15$ b) $\log 8$ c) $\log 48$

2) اختر الاجابة الصحيحة للمقدار $\log \frac{a}{b}$ من :

a) $\log a \ / \log b$ b) $\log(a - b)$

c) $\log a - \log b$ d) ليس اي منها

3) برهن انه اذا كان : $a = \log_c b \quad , \quad b = \log_a c$

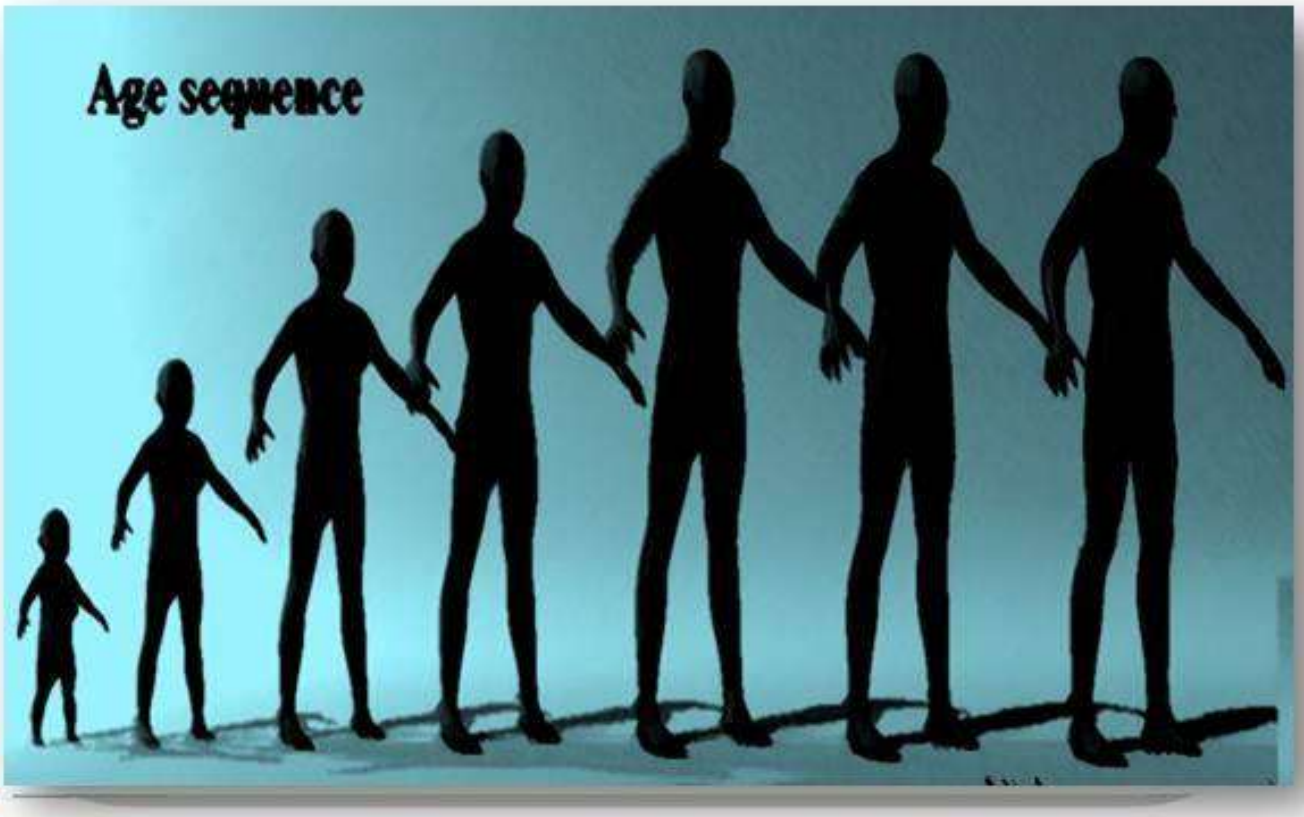
فان : $\log_b a = \frac{1}{ab}$

4) اي مقدار من المقادير التالية يكافىء $2 \log a - \log b$ ؟

a) $\log \frac{a^2}{b}$ b) $\log \left(\frac{a}{b}\right)^2$ c) $\log a^2 - \log b$ d) $\log(ab)^2$

4

الفصل الرابع
المتتاليات



الفصل الرابع: المتتاليات
4 Sequences

المحتوى العلمي للفصل:

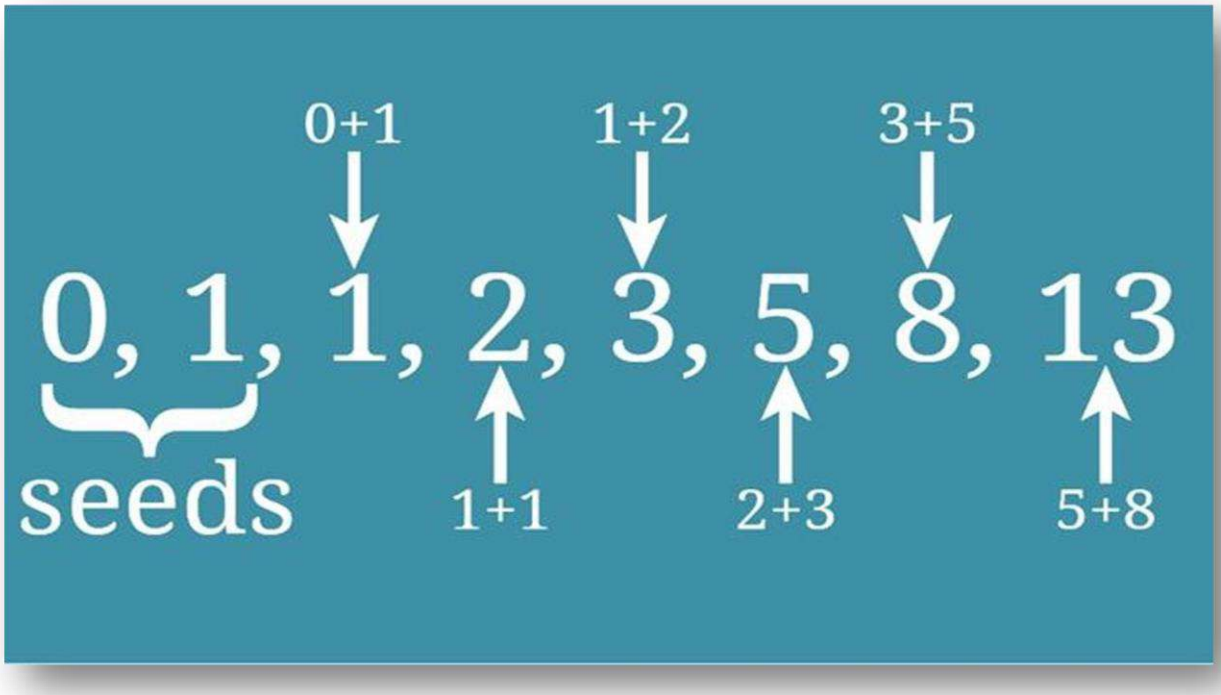
[4-1] : المتتالية كتطبيق وتعريف.

[4-2] : الحد العام للمتتالية.

[4-3] : المتتالية الحسابية.

[4-4] : المتتالية الهندسية.

[4-5] : المتتالية الهندسية اللانهائية.



الاهداف السلوكية

ينبغي ان يصبح الطالب في نهاية دراسته لهذا الفصل قادرا على أن :

- يتعرف على مفهوم المتتالية كتطبيق .
- يتعرف على مفهوم المتتالية الحسابية, وكيفية ايجاد الحد العام .
- يستنتج قاعدة مجموع أي عدد من حدود المتتالية الحسابية اذا علم الحد الأول والحد الأخير أو اذا علم الحد الأول وأساس المتتالية. .
- يعرف مفهوم المتتالية الهندسية, وكيفية ايجاد الحد العام لها.
- يتعرف على كيفية ايجاد n من حدود المتتالية الهندسية اذا علم حدها العام.
- يتعرف على المتتالية الهندسية اللانهائية, وكيفية ايجاد مجموعها.

المصطلحات	الرمز أو العبارةالرياضية
المتتالية	$\langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle$
الحد العام للمتتالية	$\langle a_n \rangle$
المتتالية الحسابية	$\langle a, a+d, a+2d, a+3d, \dots, a+(n-1)d \rangle$
أساس المتتالية الحسابية	$d = a_{n+1} - a_n$
المتتالية الهندسية	$\langle a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1} \rangle$
أساس المتتالية الهندسية	$r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$
المتتالية الهندسية اللانهائية	$\langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n,\dots} \rangle$
مجموع متتالية هندسية لانهائية	$S = \frac{a}{1-r}$

المقدمــة



هناك العديد من أنماط الأعداد التي توجد في الطبيعة وتستخدم في الأعمال التجارية ويمكن أن تكون على غرار المتتاليات، والتي هي قوائم من الأعداد. فالمتتالية عبارة عن أعداد مرتبة بترتيب معين وقد يكون هذا الترتيب وفق قاعدة صريحة أو ضمنية , وتعد المتتالية من المحاور الأساسية التي اعتمدها الأنسان وطبقها في حياته التجارية ,بعض المتتاليات تصنف باستخدامها للتنبؤ للحد اللاحق من الحد السابق , بالإضافة الى استخدامها في الكثير من العلوم الأخرى, والمتتاليات العددية غير المنتهية هي أساس علم التحليل الرياضي .

وللمتتاليات الكثير من التطبيقات في حياتنا:



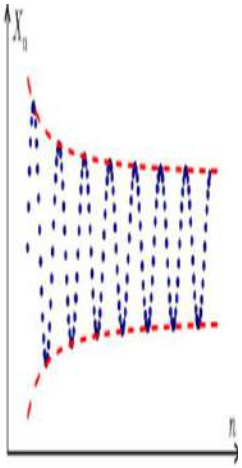
- الساعة تطبيق حي للمتتالية.
- حركة الشمس يتكون فيها ظل وتغير طول الظل يعتبر نوع من المتتاليات.
- المسافة التي نتحركها تعتبر نوع من المتتاليات.
- المدرجات وتغير أنماطها حسب الملاعب.
- تغير إشارة المرور.
- عدد الفاكسات والإيميلات المستلمة.
- تتابع قطرات الدم عند النزف.
- تتابع ضربات القلب.
- عدد درجات السلم في منزل معين.



من العلماء الذين كان لهم الأثر في مجال المتتاليات: جوهان كارل فردرج جاوس المعروف جاوس(1777-1855) Johan Carl Friedrich Gauss كان رياضياتيا وعالما ألمانيا وكان من أكثر الرياضيين تأثيرا وأغزرهم إنتاجا وكان له أثر في مجال المتتاليات في ايجاد مجموع المتتالية الحسابية .ولقد طور في رسالته للدكتوراه ولم يتجاوز الثانية والعشرون مفهوم العدد العقدي واستخدمه لإثبات النظرية الأساسية للجبر ونشر عام 1805نظرية الأعداد ، له نتاجات جوهرية في الهندسة التفاضلية والجبر والتحليل والفلك والإحصاء كما ساهم في إدخال الرياضيات إلى فيزياء الكهرباء والمغناطيسية والجاذبية والبصريات واستنبط حلا للمعادلات ذات الحدين ، وأثبت قانون التبادل التربيعي وأسس النظرية الرياضية للكهرباء وأطلق اسمه على وحدة الحث الكهرومغناطيسية.

[4-1] :المتتاليات كتطبيق وتعريف

تصادفنا في أحيان كثيرة أنماط من الأعداد نهتم بترتيب عناصرها بحيث يكون لدينا في كل حالة العدد الأول، العدد الثاني ،العدد الثالث وهكذا....كما في الأمثلة الأتية:



a. $\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rangle$.

b. $\langle 1, 3, 5, 7, \dots \rangle$

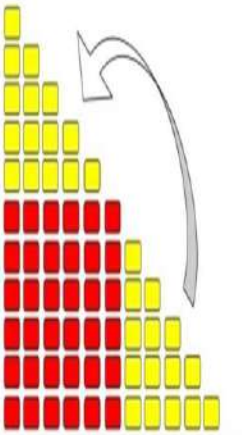
نسمي كلا من هذه المجموعات المرتبة (متتالية)أو متتابعة تمييزا لها عن المجموعات والذي سنوضح ذلك لاحقا، رياضيا يمكن التفكير بالمتتالية كدالة والتي مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة او مجموعة جزئية مرتبة منتهية تبدأ بالعدد 1.وكما يلي:

$$f(1)=a_1 ، f(2) = a_2 ، f(3) = a_3, \dots, f(n) = a_n$$

الزوج المرتب ((n , f(n)) يسمى بالحد النوني ويرمز له a_n .الزوج المرتب ((1,f(1)) يسمى الحد الأول للمتتالية f ويرمز له a_1.يرمز للمتتالية f بالرمز $(a_n)_{\geq 0}$ أو $\langle a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \rangle$،العدد الطبيعي n يسمى رتبة الحد a_n .

تعريف[4-1] :المتتالية Sequence

تعرف المتتالية بأنها دالة حقيقية مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة أو مجموعة جزئية مرتبة منتهية تبدأ بالعدد 1 ومجالها المقابل مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية R ومدى الدالة يمثل حدود المتتالية.



ولما كان مجال المتتالية وحسب التعريف السابق هو مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة z^+ أو مجموعة جزئية مرتبة منتهية تبدأ بالعدد 1 فإننا غالبا مانهمل ذكر المجال عند كتابة المتتالية ونكتفي بذكر المدى مرتبا بحيث يبدأ بصورة الأعداد 1,2,3,... على الترتيب وكالآتي: $\langle a_1, a_2, a_3, \dots \rangle$ حيث a قاعدة الدالة وتسمى $\langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle$ حدود المتتالية ويسمى a_n الحد النوني للمتتالية.

ففي المثال الآتي : $f(n) = 2n$ يعبر عن المتتالية كتطبيق:

$$\{(1,2) ، (2,4) ، (3,6) ، \dots\}$$

إن مدى هذه المتتالية هي مجموعة الأعداد{ 2,4,6,... } وهي مجموعة غير منتهية.

ملاحظة

اذا لم يذكر مجال المتتالية فإنه يعتبر مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة. نستخدم النقط المتقطعة (...,) للإشارة الى الاستمرار في متتالية غير منتهية

[4-1-1] :خصائص حدود المتتالية

- حدود المتتالية :تسمى الأعداد المرتبة في المتتالية بحدود المتتالية ويفصل بين كل حدين متتابعين بوضع فارزة (,)
- يعتبر ترتيب الحدود في المتتالية خاصية مميزة لها ،فالمتتالية $\langle 2,4,6,8 \rangle$ تسمى متتالية الأعداد الزوجية وهي تختلف عن المتتالية $\langle 2,6,8,2 \rangle$ مع إن حدودهما متساوية.

عندما نقول أن حدود المتتالية في ترتيب فلا يوجد شرط معين لهذا الترتيب فمن الممكن:

1- أن يكون ترتيب الدالة تصاعدي (متزايد) وهذا يعني أن المتتالية المتزايدة هي التي تزداد قيم حدودها بصفة مستمرة كلما كبرت رتبة الحد، مثلاً المتتالية $\langle 2,4,6,8,.. \rangle$.

2 - أن يكون ترتيب الدالة تنازلي (متناقص) .وهي التي تتناقص قيم حدودها بصفة مستمرة كلما كبرت رتبة الحد ،مثلاً المتتالية $\langle 10\,000, 1000, 100, 10 \rangle$.

3-أن يكون الترتيب للمتتالية ثابت أي أن يكون كل حد فيها له نفس القيمة (ثابت) مهما كان ترتيبه، مثلا المتتالية $\langle 6,6,6,6,\ldots \rangle$.

4- أي ترتيب يمكن أن يتخذ و بدون أن يكون لها قاعدة اقتران.

$\langle 12,8,75,16,752 \rangle$.



اوراق الزهرة تمثل متتالية

[4-1-2]: أنواع المتتاليات

هناك نوعان من المتتاليات :



المتتالية المنتهية

التي تضم قائمة تتكون من عدد محدود من الأعداد كالمتتالية $\langle 1,3,5,7 \rangle$ وهي متتالية منتهية.

المتتالية غير المنتهية

تضم قائمة تتكون من عدد غير محدود من الأعداد والتي تستمر بدون نهاية فالمتتالية $\langle 1,2,3,4,5,\ldots \rangle$ متتالية لانهائية بسيطة.

[4-2] : الحد العام The nth Term for Sequence

بوجه عام تتوالى حدود المتتالية بانتظام أي تكون هذه الحدود وفق نمط أو قاعدة معينة بحيث يمكن معرفة أي حد من حدود المتتالية إذا عرف رتبة ذلك الحد . الحد الذي رتبته n يسمى بالحد النوني أو الحد العام في المتتالية ويرمز له a_n , u_n , .. وقد استخدمنا في هذا الفصل الرمز a_n للتعبير عن الحد النوني للمتتالية.

تعريف [4-2]: الحد العام للمتتالية General Term for Sequence

هو الحد الذي يمثل جميع حدود المتتالية وبواسطته نتمكن من إيجاد أي حد من حدود المتتالية فالحد الذي رتبته n حيث n عدد صحيح موجب يسمى الحد العام للمتتالية .

مثال (1): إستنتج الحد العام للمتتالية التي حدودها $\langle 2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \dots \rangle$.

الحل: الحد الأول $a_1 = 2 = n+1 = 1+1=2$

الحد الثاني: $a_2 = \frac{3}{4} = \frac{3}{2^2}$

الحد الثالث $a_3 = \frac{4}{9} = \frac{4}{3^2}$

. .

الحد العام $a_n = \frac{n+1}{n^2}$

مثال (2):- جد الحدود الأربعة الأولى للمتتالية التي حدها العام $a_n = 3n - 2$

الحل :- بالتعويض عن n=1,2,3,4 في دالة الحد العام نحصل على:

$a_1 = 3x1-2=1$

$a_2 = 3x2-2=4$

$a_3 = 3x3-2=7$

$a_4 = 3x4-2=10$

إذا الحدود الأربعة الأولى هي : 1,4,7,10

مثال(3):- جد الحدود الثلاثة الأولى من المتتاليةٌ التي حدها الأول =5 والمعرفة بالصورة

$$a_{n+1} = 2a_n - 3 \qquad n \geq 1$$

الحل :- بالتعويض عن n=1,2,3 في دالة الحد العام نحصل على:

$$a_1 = 5 \quad ، \quad a_{n+1} = 2a_n - 3$$
$$a_2 = a_{1+1} - 3 = 2(5) - 3 = 7$$
$$a_3 = a_{2+1} - 3 = 2(7) - 3 = 11$$

اذا الحدود الثلاث 5,7,11

[4-2-1]: تمثيل المتتالية بيانيا

بما أن المتتالية تطبيق إذاً يمكن تمثيلها بيانيا كمجموعة من النقاط بشكل أزواج مرتبة في المستوى الإحداثي.

مثال (4): أكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية 3n-1 ثم مثلها بيانيا في المستوي الإحداثي وحسب الجدول الآتي

n	1	2	3	4	5
a_n	2	5	8	11	14
(n, a_n)	$(1, 2)$	$(2, 5)$	$(3, 8)$	$(4, 11)$	(5,14)



تمارن[1-4]

A. اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1) ان الحد الثالث للمتتالية التي حدها العام $3n+1$ هو:

a.10 b. 8 c. 6 d. 4

2) ان الحد الثاني للمتتالية التي حدها العام $14n-6$هو:

a.8 b. 20 c. 22 d. 24

3) ان الحد التالي للمتتالية $\langle 1, 4, 9, 16, \ldots \rangle$ هو:

a.18 b.20 c.22 d.25

4) ان الحد التالي للمتتالية $\langle 1, 8, 27, \ldots \rangle$هو:

a.64 b. 16 c.81 d.100

5) ان الحد العام للمتتالية $\langle 6, 11, 16, 21 \rangle$ هو:

a. (5n) b.(5n+1) c.(5n+5) d.(5n+2)

B. أكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتاليات التي حدها العام :

a) $a_n = n^2 + 1$
b) $a_n = 3n - 1$
c) $a_n = n^2 + 1$

[4-3] :المتتالية الحسابية Arithmetic Sequences

تعريف[4-3] :المتتالية الحسابية Arithmetic Sequence

هي المتتالية التي يكون فيها ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة يساوي مقدار ثابت ويسمى أساس المتتالية (Common difference) ويرمز له بالرمز d.

عليه فأن المتتالية هي دالة متقطعة التي مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة كل متتالية لها نمط تتميز به، فاذا رمزنا للحد الأول لمتتالية حسابية(عددية)بالرمز a ولأساس المتتالية بالرمز d والحد الأخير بالرمز a_n فعندئذ يمكن كتابة المتتالية بالشكل الآتي:

$$\langle a_n \rangle_{n\geq 1} = \langle\ a\ ,a\ +\ d\ ,a+2d\ ,a+3d\ ,\ldots,\ a+\ (n-1)\ d\rangle$$

وبالتالي فأن:

الحد الأول: $a_1 = a_1 + (0)d$

و الحد الثاني : $a_2 = a_1 + (2-1)d = a_1 + d$

والحد الثالث : $a_3 = a1 + (3-1)d = a1 + 2d$

ويلاحظ أن جميع حدود المتتالية تشترك بالعنصر a.أساس المتتالية d يظهر في الحد الثاني ومعامله يساوي واحد. معامل d في الحد الثالث يساوي 2 ...وهكذا أي أن معامل d في أي حد من حدود المتتالية ينقص واحد عن رتبة الحد.

فمثلا الحد العاشر : $a_{10} = a + 9d$

ويمكن من خلال ذلك أن نستنتج قانون الحد العام للمتتالية الحسابية:

The General Term For Arithmetic Sequence

تعريف[4-4] : الحد العام للمتتالية الحسابية

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

حيث أن: a_n:الحد النوني ، a_1 الحد الأول ، d أساس المتتالية ، n عدد الحدود

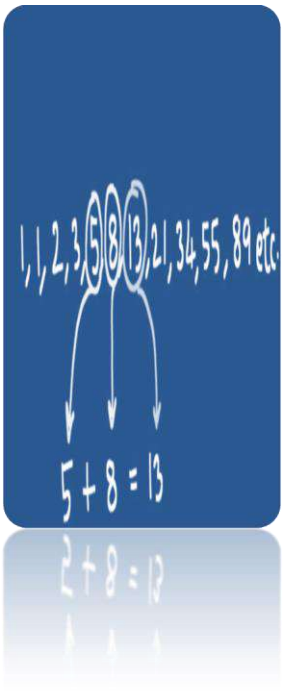
ولإيجاد قيمة أساس المتتالية:

1- اذا علم حدان متتاليان من المتتالية الحسابية:

$$d = a_{n+1} - a_n \quad \forall n \in z^+$$

2- اذا علم حدان غير متتاليين فيها:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} \quad m > n$$



مثال(5):- متتالية حسابية $a_4 = 18$ ، $a_7 = 16$ ، جد حدها الأول وأساس المتتالية.

الحل:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{16 - 18}{7 - 4} = -\frac{2}{3}$$ أساس المتتالية

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 18 = a_1 + \left(3 \times \frac{-2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 18 = a_1 + (-2) \Rightarrow$$

$$a_1 = 20$$ الحد الأول

مثال(6):- جد الحدود الأربعة اللاحقة للمتتالية الحسابية $\langle 55, 49, 43, .. \rangle$:

الحل: 49-55=-6 ، d= 43-49=-6

$$\therefore d = -6$$

الأن سوف نبدأ بإضافة (-6) للحد الثالث للمتتالية لينتج:

$$a_5 = 37 + (-6) = 31 \quad ، \quad a_4 = 43 + (-6) = 37$$

ومن ثم نستمر باضافة (-6) لغاية الحدود الأربعة المطلوب إيجادها.

$$a_7 = 25 + (-6) = 19 \quad ، \quad a_6 = 31 + (-6) = 25$$

وعليه فان الحدود الأربعة اللاحقة للمتتالية هي: $37, 31, 25, 19$

المصطلحات

متتالية Sequences

حد Term

Common difference

اساس متتالية

ARITHMETIC MEANS أوساط حسابية

مثال(7):- جد المتتالية التي حدها الثامن يساوي 20 وحدها الخامس يساوي14.

الحل: نستخدم الصيغة التالية لإيجاد أساس المتتالية :

الحد اللاحق

هو الحد الذي يأتي بعد آخر حد مذكور في المتتالية

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

$$\therefore d = \frac{20 - 14}{8 - 5} = \frac{6}{3} = 2$$

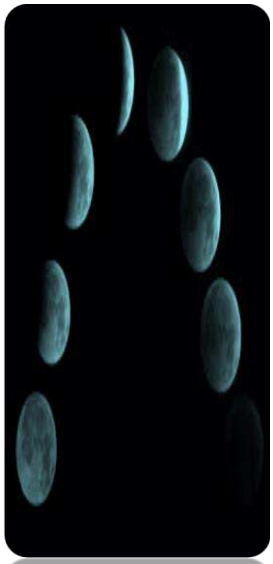
نعوض عن قيمة d في معادلة الحد الخامس أو الثامن وكالآتي:

$$a_5 = a_1 + (5 - 1)d$$

$$14 = a_1 + (5 - 1)2$$

$a_1 = 6$ الحد الأول

المتتالية هي: $\langle 6, 8, 10, 12, \dots \rangle$ =(6 , 6+2 , 6+4, 6+6,...)



مثال (8):- أكتب الحد النوني أو الحد العام في المتتالية $\langle 3, 6, 9, 12, 15, \dots \rangle$ ثم إستنتج الحد الثاني عشر:

الحل:

نلاحظ أن كل حد يزداد بمقدار 3 عن الحد السابق له وعليه فالحد العام يساوي:

$$\because a_1 = 3 \text{، } a_2 = 6 \text{، } a_3 = 9$$

وعليه فالحد العام $a_n = 3n$

$$\therefore a_{12} = 3 \times 12 = 36$$

مثال(9):- ميز المتتاليات الحسابية من غيرها لكل مما يلي:

a. $\langle 50, 47.44, 41, 38, \dots \rangle$

b. $\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{20} \rangle$

الحل:-

a. $\langle 50, 47, 44, 41, \dots \rangle$

$$a_1 = 50 \text{ ، } a_2 = 47 \text{ ، } a_3 = 44$$

$$a_2 - a_1 = 47 - 50 = -3$$

$$a_3 - a_2 = 44 - 47 = -3$$

- عليه فالمتتالية $\langle 50, 47, 44, 41, 38, \dots \rangle$ حسابية

لأن الفرق بين كل حد والحد السابق له يساوي مقدار ثابت.

b. $\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{20} \rangle$:

$$a_1 = 1 \text{ , } a_2 = \frac{1}{2} \text{ , } a_3 = \frac{1}{3}$$

$$a_2 - a_1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$a_3 - a_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

- عليه فالمتتالية $\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{20} \rangle$ ليست حسابية

لأن الفرق بين كل حد والحد السابق له يساوي مقدار ثابت.

مثال(10):- اذا كان a=6, d=7 ، فجد الحدود الخمسة الأولى من المتتالية.

الحل:- $d=7\ ,\ a_1 = 6$

$$a_2 = a_1 + d = 6 + 7 = 13$$
$$a_3 = a_2 + d = 13 + 7 = 20$$

الحدود الخمسة: 6,13,20,27,33

المتتالية $\langle a_n \rangle = \langle 6, 13, 20, 27, 33, \dots \rangle$

مثال (11):- أكتب معادلة الحد العام للمتتالية الحسابية $\langle 8, 17, 26, 35, \dots \rangle$

الحل:

$a_n = a_1 + (n-1)d$ صيغة الحد النوني

$a_n = 8 + (n-1)9$ $a_1 = 8,$ $d = 9$

$a_n = 8 + 9n - 9$ باستخدام خاصية التوزيع

$a_n = 9n - 1$ بالتبسيط

المعادلة هي: $a_n = 9n - 1$

مثال (12):- أراد صاحب أسواق تغيير ترتيب أحد الصفوف الخاصة بالمواد الغذائية بحيث يكون في الصف الأول علبة واحدة وفي الصف الثاني 4 علب وفي الصف الثالث 7 علب والباقي بنفس النمط ، احسب عدد العلب في الصف 10.

الحل: إن ترتيب العلب يتخذ متتالية حسابي $\langle 1, 4, 7, \dots \rangle$

ولإيجاد عدد العلب في الصف 10 : $a_1=1,\ d=4-1=3$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_{10} = 1 + (10-1)3$$
$$a_{10} = 1 + (9)(3)$$
$$a_{10} = 28$$

[4-3-1] : الأوساط الحسابية Arithmetic Means

يمكن إدخال وسط حسابي بين العددين a,b فيكون هذا الوسط $= \frac{a+b}{2}$ وتشكل الأعداد $a , \frac{a+b}{2} , b$ متتالية.

ففي المتتالية الحسابية $\langle 5, 9, 13, 17 \rangle$ نلاحظ أن العدد 9 هو الوسط الحسابي للعددين المجاورين له 5,13 لأن : $9 = \frac{5+13}{2}$ ، كما أن العدد 13 هو الوسط الحسابي للعددين 9,17.

[4 -3-2]: إدخال عدد من الأوساط الحسابية بين عددين

يمكن أن ندخل أي عدد من الاوساط الحسابية بين العددين a,b بحيث تتكون لدينا متتالية حسابية

عدد حدودها = عدد الاوساط +2.

مثال (14):- إدخل أربعة أوساط حسابية بين العددين 4 و 29 :

الحل: عند إدخال أربعة أوساط حسابية بين العددين 4,29 تصبح المتتالية بالشكل التالي:

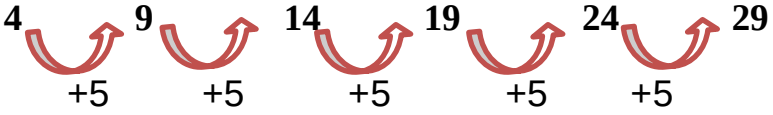
ويكون عدد الحدود = عدد الأوساط + 2 = 6 ، $a_6 = 29$ ، $a_1 = 4$،

$\langle 4, \dots, \dots, \dots., \dots, 29 \rangle$

$$a_6 = a_1 + (n-1)d \implies a_6 = 4 + (6-1)d$$

$$\implies 29 = 4 + 5d \implies 25 = 5d \implies d = 5$$

الآن نستخدم قيمة d لإيجاد الأوساط الاربعة الحسابية بإضافة 5 إلى الحد الأول فيصبح الناتج 9 ثم إضافة 5 إلى الحد الثاني ليصبح الناتج= 14 وهكذا نستمر للحد الأخير وكما هو مبين ادناه:



وعليه تصبح المتتالية $\langle 4, 9, 14, 19, 24, 29 \rangle$

وتكون الأوساط الحسابية 9,14,19,24

مثال (15): جد الأوساط الأربعة الحسابية بين 16 و 91 .

الحل: نستطيع إستخدام صيغة الحد النوني لإيجاد الحد العام d .

$$16, - - - -, - - - - - -, - - - - - -, 91$$

$$a_n = 91 \quad ، a_1 = 16$$

صيغة الحد النوني $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$a_6 = 16 + (6-1)d \qquad n = 6 \quad ، a_1 = 16 \, , a_6 = 91$$

$$\Rightarrow 91 = 16 + 5d$$

$$\Rightarrow 5d = 91 - 16$$

$$5d = 75 \qquad \text{بقسمة الطرفين على } 5$$

$$d = 5$$

16+15=31

31+15=46

46+15=61

61+15=76

ملاحظات

-تكون (a_n) دالة من الدرجة الأولى.

1. اذا كانت $d = 0$ فان قيمة أي حد من حدود المتتالية=الحدالأول

2-اذا كانت $d < 0$ فان قيم حدود المتتالية في

الآن نستخدم قيمة d لإيجاد الأوساط الأربعة الحسابية:

16 +15 31 +15 46 +15 61 +15 76 +15 91

الاوساط هي: 31, 46, 61,76

تمـارين [2-4]

1) أكتب الحد العام لكل متتالية حسابية مما يلي :

a) $\langle 3, 6, 9, 12, \dots \rangle$

b) $\langle 4, 5, 6, 7, \dots \rangle$

c) $\langle\ 4, 8, 12, \dots \rangle$

2) أكتب الحدود الخمسة الأولى إذا علمت أن $a_1 = 41 \quad , d = 5$

3) جد الحد الخامس عشر للمتتالية الحسابية : $\langle\ -3, 4, 11, 18, \dots\ \rangle$

4) جد الحد الرابع للمتتاليتين الحسابيتين:

a) $\langle 12, 16, 20, \dots \rangle$ b : $\langle 5, 3, 1, -1, \dots \rangle$

5) جد الحد النوني لكل مما يلي:

a) $a_1 = 3، d = -5، n = 24$

b) $a_1 = -5، d = 7 ، n = 13$

6) بين هل ان المتتاليات الاتية حسابية ام لا مع التوضيح:

a. $\langle 4, 7, 10, 13, \dots \rangle$

b. $\langle \frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \dots \rangle$

7) جد الحد التاسع للمتتالية الحسابية التي حدها الأول2 وحدها الثاني يساوي 9

8) جد الأوساط الحسابية لكل متوالية مما يلي

$\langle 10, \dots, \dots, -8 \rangle$, $\langle 55, .., \dots., 115 \rangle, \langle -8, \dots, \dots, 7\ \rangle$

9) جد الأوساط الثلاثة بين 44,92

10) ادخل أربعة أوساط حسابية بين العددين 9 ، 11-

[4-3-3] : مجموع متتالية حسابية نهائية

The Sum Of Finite Arithmetic Sequence

من الطرائف التي تروى عن "كارل فريدريك جاوس" في وضع قانون مجموع المتتالية الحسابية فعندما كان في سن العاشرة من عمره قام باحداث شغب في الفصل هو وبعض اصدقائه فأراد المدرس أن يعاقبهم جميعا فأمرهم أن يجمعوا الأعداد الصحيحة من1 لغاية 100 من المدهش انه بعد وقت قصير قدم "كارل فريدريك جاوس" إجابة صحيحة لهذه المسألة و التي من المفترض أن تأخذ وقتاً طويلاً ، .وقد كان حل "كارل فريدريك جاوس" بسيطا جدا فقد نظر الى الارقام بمنظور اخر... فباعتبار ان هذه الارقام من 1 الى 100 تشكل متتالية حسابية فتكون بالصورة أدناه :

$$\langle 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 96, 97, 98, 99, 100 \rangle$$

وبالتالي فان مجموع المتتالية هو:

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100)$$

وعليه فان مجموع ال 100حد هو:

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$$

ثم كتب بشكل معكوس $S_{100} = 100 + 99 + 98 + 97 + \cdots + 2 + 1$

ثم قام بجمع السطرين $S_{100} = 101 + 101 + 101 + \cdots + 101$

لأن عدد الحدود 100 $2\,S_{100} = 100 \times 101$

وبقسمة طرفي المعادلة على 2 : $S_{100} = 50 \times 101 = 5050$

نلاحظ أن101 تتكرر50 مرة وهو نصف عدد حدود المتتالية أي أن مجموع المتتالية يصبح:

$$50 \times 101 = 5050$$

من ذلك يمكن أن نستنتج قانوني مجموع المتسلسلة الحسابية:مجموع أي متتابعة حسابية يساوى نصف عدد الحدود مضروبا في مجموع الحد الاول والحد الاخير،أومجموع الحد الثاني والحد ماقبل الأخير وعليه يمكن التعبير رياضيا:

$$S_n = \frac{n}{2} \times (a_1 + a_n)$$

وبالتعويض عن الحد a_n بمعادلة الحد العام $a_n = a_1 + (n-1)d$ نحصل على:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

وعليه لايجاد مجموع أول 100 عدد صحيح موجب فانك تلاحظ أن المتتالية $\langle 1, 2, 3, \dots, 100 \rangle$ فان: $a_1 = 1$ ، $a_n = 100$ ، d=1 وعليه فان مجموع المتتالية:

صيغة مجموع متتالية $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$$S_{100} = \frac{100}{2}(1 + 100)n = 100 \text{ ، } a_1 = 1 \text{ ، } a_n = 100$$

$$S_{100} = 50(101) \Longrightarrow S_{100} = 5050$$

مثال (16):- جد مجموع أول 20 حدا من حدود المتتالية الحسابية $\langle 3, 8, 13, \dots \rangle$

الحل:- بما أن المتتالية حسابية ، حدها الأول=3 ، وأساسها d=5 فأن :

$$S_{20} = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}[2(3) + (20-1)5]$$

$$S_{20} = 10[6 + 95]$$

$$S_{20} = 10 \times 101 = 1010$$

مثال (13):- في مدرجات ملعب يحوي 20 مقعد في الصف الأول وكان كل صف يتسع لعدد من المقاعد يزيد على الصف الذي يسبقه مباشرة بمقدار 4 مقاعد كم عدد المقاعد في هذا الملعب اذا كان هذا الملعب يتسع ل10 صفوف ؟

الحل : $a_1 = 20$ ، d=4 ، n=10

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2(20) + (10-1)4]$$

$S_{10} = 5[40 + 36] = 380$ مقعد

مثال(17):- جد الحدود الثلاثة الأولى من المتتالية الحسابية التي حدها الأول 9 وحدها الأخير105 ومجموعها 741.

الحل: الخطوة الاولى

لما كان المعلوم $S_n = 741 \quad a_n = 105 \quad a_1 = 9$

صيغة مجموع متتالية $S_n = \frac{n}{2} \times (a_1 + a_n)$

$$741 = \frac{n}{2}(9 + 105) \Longrightarrow 741 = 57n \Rightarrow n = 13$$

الخطوة الثانية: إيجاد d

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$105 = 9 + (13-1)d$$

$$96 = 12d \Rightarrow d = 8$$

الخطوة الثالثة: إستخدم d لايجاد a_2 و a_3

$$a_2 = 8 + 9 = 17$$

$$a_3 = 17 + 8 = 25$$

وعليه تكون الحدود الثلاثة الاولى 9,17,25

مثال(18) : جد مجموع الحدود الثمانية الاولى من المتتالية $\langle 2, 5, 8, 11, 14, \dots \rangle$.

الحل: الحد الأول $a_1 = 2$ ، d=5-2=3

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_8 = a_1 + (8-1)d$$

$$a_8 = 2 + (8-1)3 = 2 + 21 = 23$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_8) = \frac{8}{2}(2 + 23) = 100$$

مثال(19):- مسرح له 10 صفوف من المقاعد للجلوس ،يوجد في الصف الأول 20مقعد ، 21 مقعد في الصف الثاني، 22 مقعد في الصف الثالث، ماعدد المقاعد في المسرح؟

الحل: عدد المقاعد في الصف الأول20 $a_1 =$

عدد المقاعد في الصف الثاني:21 $a_2 =$

عدد المقاعد في الصف الثالث:22 $a_3 =$

إن عدد المقاعد للصفوف 20 تشكل متتالية حسابية أساسها d=1 لأن

$a_3 - a_2 = 23 - 22 = 1$ ، $d = a_2 - a_1 = 22 - 21 = 1$

وباستخدام الصيغة العامة للحد النوني:$a_n = a_1 + (n-1)d$

$$a_n = 20 + (10-1)1 = 20 + 9 = 29$$

مجموع المقاعد $S_{10} = 20 + 21 + 22 + 23 + \cdots + 29$

$$S_{10} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{10}{2}(20 + 29) = 5(49) = 245$$

مثال(20):- جد مجموع المتتالية الحسابية التي حدها العام $a_n = 2n - 5$ والمحددة رتبتها من (n=15)إلى (n=47).

الحل:- لإيجاد المجموع للمتتالية الحسابية ، نحتاج إلى إيجاد n ، n=47-15=32 ، وعليه هنالك 32 حدا يجب إيجادها ومن ثم إيجاد مجموعها ولذلك نستخدم

الطريقة الثانية: باستخدام الصيغة $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

الحد الأول يبدأ عند التعويض n=15 في معادلة الحد العام ، a_n الحد الأخير التعويض في معادلة الحد العام n=47 وكما يلي:$a_1 = 2(15) - 5 = 25$

$$a_n = 2(47) - 5 = 89$$

$$S_n = \frac{32}{2}(25 + 89) = 1824$$

تمارين[4-3]

1) جد S_n لكل مما يلي:

a) $a_1 = 7 \quad a_n = 79 \quad n = 8$

b) $a_2 - a_1 = 3 \quad n = 19 \quad a_n = 115$

c) $d = -3 \quad n = 21 \quad a_n = -64$

d) $a_1 = 3 \quad d = -4 \quad a_n = 8$

e) $a_1 = 4 \quad a_n = 100 \quad n = 25$

2) جد مجموع المتتالية الحسابية لكل مما يلي:

$$\langle 5, 11, 17, \ldots, 95 \rangle$$

$$\langle 7, 14, 21, 28, \ldots, 98 \rangle$$

3) جد الحدود الثلاثة الأولى لكل من المتتاليتين الحسابيتين:

a) $a_1 = 11 \ , \ a_n = 110 \ , \ S_n = 726$

b) $n = 8 \ , \quad a_n = 36 \ , \ S_n = 120$

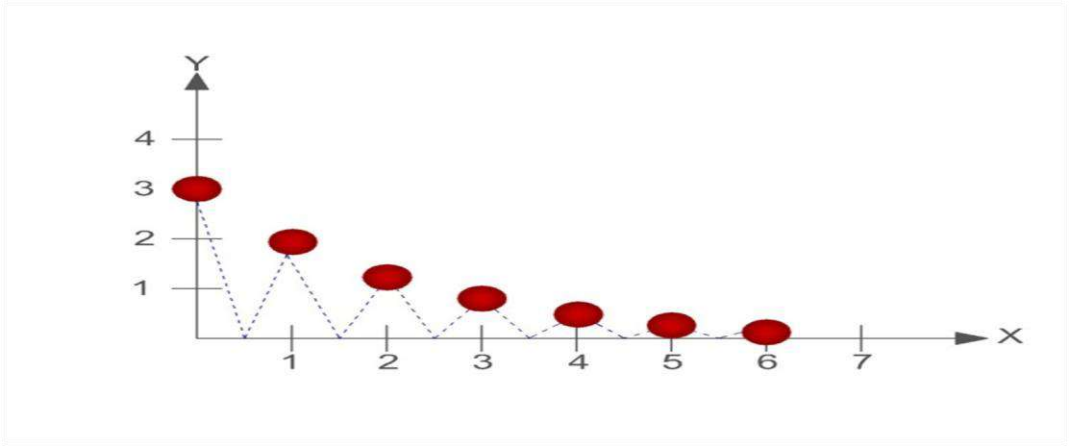
4) جد مجموع كلا مما يلي:

متتالية حسابية التي رتبتها الاولى(n=1) وتنتهي عند(n=6) وحدها العام

a) $a_n=2n-1$

b) متتالية حسابية رتبتها الاولى (n=2) ورتبتها الأخيرة (n=10) وحدها العام (5n-2)

[4-4] : المتتالية الهندسية Geometric Sequences



كيف يمكن استخدام تطبيقات المتتالية الهندسية في عملية أرتداد الكرة؟

إذا أمكنك يوما أن تراقب إرتداد كرة، فاذا حاولت أن تضرب كرة بيدك نحو الأرض ، فانك ستلاحظ أن الكرة لا ترتد إلى نفس الموضع الذي ضربت منه .أفرض أن الكرة أسقطت من إرتفاع ثلاثة أقدام ، وقد إستمرت الكرة بالسقوط فالكرة إرتدت بنسبة % 60 من الموضع الذي سقطت منه

إن الارتفاعات بعد إرتداد الكرة تشكل متتالية هندسية وكالآتي:

ارتفاع الارتداد الأول للكرة $3(0.6) = 1.8$ feet

ارتفاع الارتداد الثاني للكرة $1.8(0.6) = 1.08$ feet

أرتفاع الارتداد الثالث للكرة $1.08(0.6) = 0.648$ feet

فالمتتالية $\langle 1.8, 1.08, 0.648, \dots \rangle$ **تمثل متتالية هندسية.**

تعريف[4-5]: المتتالية الهندسية The Geometric Sequence

وهي المتتالية التي يكون ناتج قسمة كل حد فيها على الحد السابق له مباشرة يساوي عددا حقيقيا ثابتا وهذا العدد يسمى أساس المتتالية الهندسية (النسبة المشتركة)ويرمز له بالرمز r :

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \qquad r \in R \quad \text{حيث}$$

حدود المتتالية الهندسية $\langle a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, \dots \rangle$

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots$$ اساس المتتالية

فمثلا المتتالية $\langle 5, 10, 20, 40, \dots \rangle$ متتالية هندسية. وذلك: $r = \frac{10}{5} = \frac{20}{10} = 2$ أي يوجد مقدار مشترك بين كل حد والحد الذي يسبقه مباشرة.

أما $\langle 5, 10, 15, 20, \dots \rangle$ فليست متتالية هندسية وذلك $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{10}{5} = 2$

بينما $r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{15}{10} = 1.5$ فلا يوجد مقدار ثابتا بين كل حد والحد الذي يسبقه مباشرة.

مثال(21):- المتتالية $\langle a^n \rangle$ حيث $a_n = 2^n$ ، $\langle 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n \rangle$ هي متتالية هندسية وذلك لأن :

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$$

مثال(22): الحد المفقود للمتتالية الهندسية $\langle 8, 20, 50, 125, \dots \rangle$ هو :

a: 75 b: 200 c: 250 d: 312.5

لما كان $\frac{125}{50} = 2.5$, $\frac{50}{20} = 2.5$, $\frac{20}{8} = 2.5$ فالمتتالية هندسية ولها نسبة ثابتة (أساس) مقداره 2.5 ،ولإيجادالحد المفقود نضرب الحد الأخير المعطى بالنسبة أو أساس المتتالية 2.5 فيصبح $(125)(2.5) =$ 312.5 عليه فأن فالجواب هو d .

مثال (23):- إشترى رجل سيارة بمبلغ 12000 000 دينار ، فاذا كانت السيارة تنقص كل سنة بمعدل 20% عن قيمتها في السنة السابقة لها ، جد قيمة السيارة في نهاية السنة الرابعة من إستخدامها .

الحل:-

عند الشراء a_1 =12 000 000

ثمن السيارة في نهاية السنة الأولى : $a_2 = 12000\,000 \times \frac{80}{100} = 9600\,000$

ثمن السيارة في نهاية السنة الثانية: $a_3 = 9600\,000 \times \frac{80}{100} = 7680\,000$

ثمن السيارة في نهاية السنة الثالثة: $\times \frac{80}{100} = 6144000$ a_4=7680 000

ثمن السيارة في نهاية السنة الرابعة: $\frac{80}{100} = 4915200$ $\times$ a_5=6144000

أي أن متتالية أسعار السيارة في نهاية كل سنة هي:

$\langle$ 7 680 000, 6 144 0000, 4 915 200 12 000 000 , 9 600 000, $\rangle$

وهي متتالية هندسية أساسها 0.8 وحدها الأول 12 000 000 ،

قيمة السيارة في نهاية السنة الرابعة $a_5 = 12\,000\,000(0.8)^4$ =49152000

مثال(24): جد الحد الرابع من المتتالية الهندسية $< 18, 144, 1152, \ldots >$

الحل:- أساس المتتالية الهندسية $r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{144}{18} = 8$

$$a_4 = ar^{4-1} = (18)(8)^3 \Rightarrow a_4 = 9216$$

مثال(25): ما ترتيب الحد الذي قيمته 1024 من حدود المتتالية الهندسية

$\langle 4, 16, 64, 256, \ldots \rangle$

الحل:- نفرض ان الحد الذي قيمته 1024 هو a_n وباستخدام معادلة الحد العام:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

وبالتعويض r=4، $a_1 = 4$، a_n =1024 في معادلة الحد العام نحصل على:

$$1024 = 4(4)^{n-1} \Rightarrow 4^5 = 4^{n-1+1}$$

$$\Rightarrow 4^5 = 4^n \Rightarrow n = 5$$

الحد الذي قيمته 1024 هو الحد الخامس.

ملاحظة:

يجب ان لا يكون في المتتاليات الهندسية حدا يساوي صفر $a_n \neq 0 \ , \forall n$

تمـــاريـــن[4-4]

1) جد الحدين اللاحقين (المفقودين) لكل متتالية هندسية:

a) $\langle 405 \ , 135 \ , 45, \dots \rangle$

b) $\langle \frac{5}{2}, \ \frac{5}{3}, \ \frac{10}{9}, \dots \rangle$

c) $\langle \frac{1}{3} \ , \ \frac{5}{6}, \ \frac{25}{12}, \dots \rangle$

d) $\langle \ \frac{-1}{4}, \frac{1}{2}, -1, \dots \ \ \rangle$

2) جد الحدود الأربعة الأولى لكل من المتتالية الهندسية الأتية التي فيها:

a. $a_1 = 1$ ، $r = 4$

b. $a_1 = -2$ ، $r = 3$

3) أكتب معادلة الحد النوني لكل من المتتاليات الهندسية الأتية:

a) $< 36 \ , 12 \ , 4 \ , \dots >$

b) $< 4 \ , -12 \ , 36 \ , \dots >$

c) $< -2 \ , 10 \ , -50 \ , \dots >$

4) الحد المفقود للمتتالية الهندسية: (-5,10,-20,40, ...) هو :

a)80 b) 35 c) 80 d)100

5) الحد العاشر للمتتالية الهندسية (144,72, 36 , 18, ...) هو :

a) 0 b) $\frac{9}{64}$ c) $\frac{9}{32}$ d) $\frac{9}{10}$

6) متتالية هندسية حدها الأول 4 وحدها السادس 128 .اكتب المتتالية.

7) متتالية هندسية حدها الأول 5 وأساسها 3 جد الحد الخامس.

[4-4-1]: الأوساط الهندسية Geometric Means

الوسط الهندسي للعددين a ,b هو ذلك العدد بحيث تكون a , c, b متتالية هندسية فلو أردنا إدخال وسط هندسي بين العددين 9,4 فاننا سنتبع الخطوات الآتية:

على فرض الوسط الهندسي للعددين 9,4 هو c ومن التعريف تكون المتتالية(9,c,4)هندسية وعليه:

$$\frac{c}{9} = \frac{4}{c} \Longrightarrow c^2 = 36 \Longrightarrow c = \pm 6$$

اذا يو جد وسطان هندسيان للعددين 9,4 هما 6,+6- وتكون هنالك متتاليتان إحداهما $\langle 9, 6, 4 \rangle$ والأخرى $\langle 9, -6, 4 \rangle$

مثال(26) :- أدخل وسطا هندسيا بين 150,6 :

الحل: الوسط الهندسي $= \pm\sqrt{a.b}$

الوسط الهندسي $= \pm\sqrt{6 \times 150}$

$$= \pm\sqrt{900} = \pm 30$$

[4-4-2]:إدخال عدد من الأوساط بين عددين

الأوساط الهندسية بين عددين a,b هي الحدود الأخرى للمتتالية الهندسية التي حدها الأول , a وحدها الأخير b وإن أساس المتتالية r.

وبذلك يكون عدد حدود المتتالية n = عدد الأوساط+2

الحد الأول للمتتالية:a

الحد الأخير للمتتالية: b ⇦ $r^{n-1} = \frac{b}{a}$

مثال(27):- كم وسطا هندسيا يمكن إدخاله بين الحدين 2,486 من متتالية هندسية اساسها العدد 3.

الحل: الصيغة العامة لإيجاد الأوساط $r^{n-1} = \frac{b}{a}$

$$3^{n-1} = \frac{486}{2}$$

بالتعويض a=2, b=486

بالقسمة $3^{n-1} = 243$

بالتحليل إلى العوامل $3^{n-1} = 3^5$

اذا تساوت الأساسات تساوت الأسس $n - 1 = 5 \Rightarrow n = 6$

مثال(28):- أدخل أربعة أوساط هندسية بين 5,160

عدد الحدود=عدد الأوساط+2

عدد حدود المتتالية = 4+2=6

الحل:- نفرض حدود المتتالية الهندسية ($a , ar , ar^2 , ar^3 , ar^4 , ar^5$)

الحد الأول : a= 5 ..... (1)

الحد الخامس: ar^5 = 160... (2)

وبقسمة المعادلة (2)على (1) نحصل على : $r^5 = 32$

بالتحليل إلى العوامل $r^5 = (2)^5$

اذا تساوت الأسس تساوت الأساسات $r = 2$

الأوساط الهندسية هي: $ar = 5(2) = 10$

$a(r)^2 = 5(2)^2 = 20$

$ar^3 = 5(2)^3 = 40$

$ar^4 = 5(2)^4 = 80$

الأوساط الهندسية هي : 10,20,40,80

∴المتتالية الهندسية $\langle 5, 10, 20, 40, 80, 160 \rangle$

مثال(29):- أدخل خمسة أوساط هندسية بين العددين $81, \frac{1}{9}$

الحل:- عدد الحدود = عدد الأوساط+2

$$\therefore n = 5 + 2 = 7$$

عدد الحدود: n=7 الحد الأول a=81، $b=\frac{1}{9}$ الحد الأخير = a_n

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$\frac{1}{9} = 81(r)^{7-1} \Rightarrow r^6 = \frac{\frac{1}{9}}{81}$$

$$r^6 = \frac{1}{729} \Rightarrow r^6 = \frac{1}{3^6} \Rightarrow r^6 = \left(\frac{1}{3}\right)^6 \Rightarrow r = \pm\frac{1}{3}$$

عندما $r=\frac{1}{3}$

الوسط الاول: $ar=81\left(\frac{1}{3}\right) = 27$

الوسط الثاني: $a\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 9$. الوسط الثالث: $a\left(\frac{1}{3}\right)^3=3$

الوسط الرابع: $a\left(\frac{1}{3}\right)^4 = 1$,الوسط الخامس: $a\left(\frac{1}{3}\right)^5= \frac{1}{3}$

عندما $r = \frac{1}{3}$ فأن الأوساط الهندسية $27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}$

وبنفس الطريقة نجد الأوساط الهندسية عندما $r = -\frac{1}{3}$

فالأوساط الهندسية هي: $-27, 9, -3, 1, -\frac{1}{3}$

[4-4-3]:مجموع متتالية هندسية نهائية

المتتالية الهندسية التي حدها الاول a واساسها r هي $\langle a, ar, ar^2, ar^3, \dots \rangle$ فأذا اخترنا n حدا من المتتالية فتكون الحدود المختارة هي $\langle a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1} \rangle$
ومجموع هذه الحدود والذي يرمز له بالرمز S_n هو:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} \quad \dots (1)$$

وبضرب طرفي (1) في r ينتج:

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^n + \cdots (2)$$

وبطرح المعادلة (2) من (1) نحصل على:

$$S_n - rS_n = a - ar^n \implies S_n(1-r) = a(1-r^n) \implies S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

$$\therefore S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad , \quad r \neq 1$$ قانون المجموع

اما اذا كان r=1 فان المتتالية الهندسية تصبح $\langle a, a, a, \dots \rangle$ ويكون المجموع الى n من الحدود:

$$S_n = a + a + a + \cdots \implies S_n = na$$

مثال (30):- جد مجموع الحدود الثمانية الأولى من المتتالية الهندسية $\langle 2, 6, 18, 54, \dots \rangle$.

الحل: $n=8, r=3, a=2$ ، $\because S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$$S_8 = \frac{2(1-3^8)}{1-3} = \frac{2[1-(3)^8]}{1-3} \implies S_8 = \frac{2(1-6561)}{-2} = 6560$$

مثال (31):- احسب S_6 للمتتالية الهندسية $\langle 64, 32, 16, \dots \rangle$.

الحل: $a = 64 \ , \ n = 6 \ , r = \frac{1}{2}$

$$S_6 = \frac{4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{64-1}{\frac{1}{2}} = 126$$

[4-5] المتتالية الهندسية اللانهائية
The Infinite Geometric Sequence

إن التعريف الذي اعطي لمجموع حدود المتتالية الهندسية يصلح لكل المتتاليات المنتهية وغير المنتهية على حد سواء. وفي حالة المتتاليات ألحسابية غير المنتهية فلا يمكن إيجاد المجموع لحدودها كافة لأن المجموع إما يكون كبيرا جدا أو صغيرا جدا.

فمثلا لانستطيع إيجاد : ... +17+13+9+5+1 ولا .....-5-4-3-2-1-

أما بالنسبة للمتتالية الهندسية غير المنتهية (اللانهائية) فأن الامر مختلف.

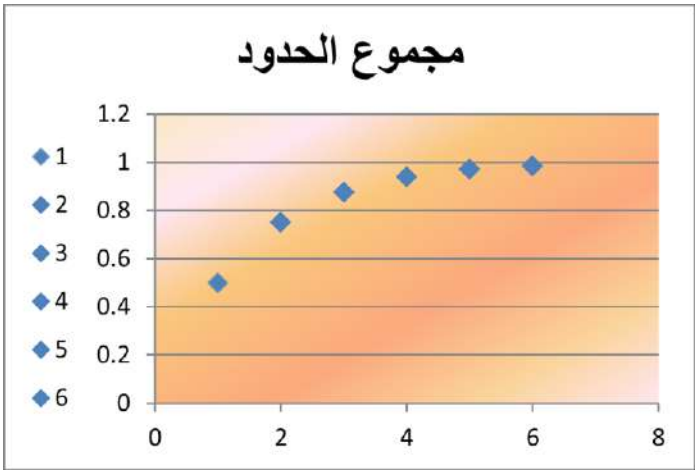
$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r} \quad ; \quad -1 < r < 1$$

فأن (r^n) تقترب من الصفر كلما زادت n زيادة كبيرة غير محددة.

قانون مجموع المتتالية الهندسية اللانهائية

افرض لديك المتتالية الهندسية اللانهائية $\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \rangle$ فانك سوف تستطيع إيجاد المجموع للمتتالية S_n للحدود n الأولى للمتتالية الهندسية ، S_n يسمى المجموع الجزئي Partial sum للمتتالية الهندسية و فيما يلي الجدول والرسم البياني الذي يوضح بعض القيم الى S_n.

من الرسم البياني يمكن ملاحظة أنه كلما إزدادت قيم n كلما إقتربت قيم المجموع الجزئي partial sum من الواحد الصحيح. هذا المقياس هو $|r| < 1$.



عليه فأن قانون ايجاد مجموع المتتالية الهندسية يكون:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} \; ; \; -1 < r < 1$$

ملاحظة: لا يصلح هذا القانون عندما : $r \geq 1$ او $r \leq -1$

مثال(32): جد مجموع المتتالية الهندسية التالية إن وجد:

$$\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \rangle$$

الحل: -

$$\because S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1/2}{1-(1/2)} = 1$$

مثال(33): جد مجموع المتتالية الهندسية التالية إن وجد:

$$\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{9}{32}, \dots \rangle$$

الحل: أولا يجب إيجاد قيمة r للإختبار هل يوجد مجموع للمتتالية.

$$a_1 = \frac{1}{2} \; , \; a_2 = \frac{3}{8}, r = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

بمان $r = \left|\frac{3}{4}\right| < 1$ **ولهذا المجموع موجدود**

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} \qquad \text{بالتعويض } a_1 = \frac{1}{2} \; , \; r = \frac{3}{4}$$

$$\therefore S_\infty = \frac{1/2}{1/4} = 2$$

تمـــارين [4-5]

1) جد s_n لكل متتالية هندسية فيما يلي:

a) $a_1 = 12 \quad a_5 = 972 \quad r = -3$

b) $a_1 = -5 \quad r = 2 \quad n = 14$

c) $a_1 = 2 \quad a_6 = 486 \quad r = 6$

d) $a_1 = 2401 \quad n = 5 \quad r = -\frac{1}{7}$

e) $a_1 = 625 \quad r = 0.4 \quad n = 8$

f) $a_3 = 36 \quad a_6 = 972 \quad n = 10$

2) جد S_n لكل متتالية هندسية ممايلي:

a) $a_1 = 1$ ، $a_6 = -243$ ، $r = -3$

b) $a_1 = 72$ ، $r = \frac{1}{2}$، $n = 7$

3) جد مجموع المتتالية الهندسية اللانهائية، اذا علمت أن:

a) $a_1 = 4$ ، $r = \frac{5}{7}$

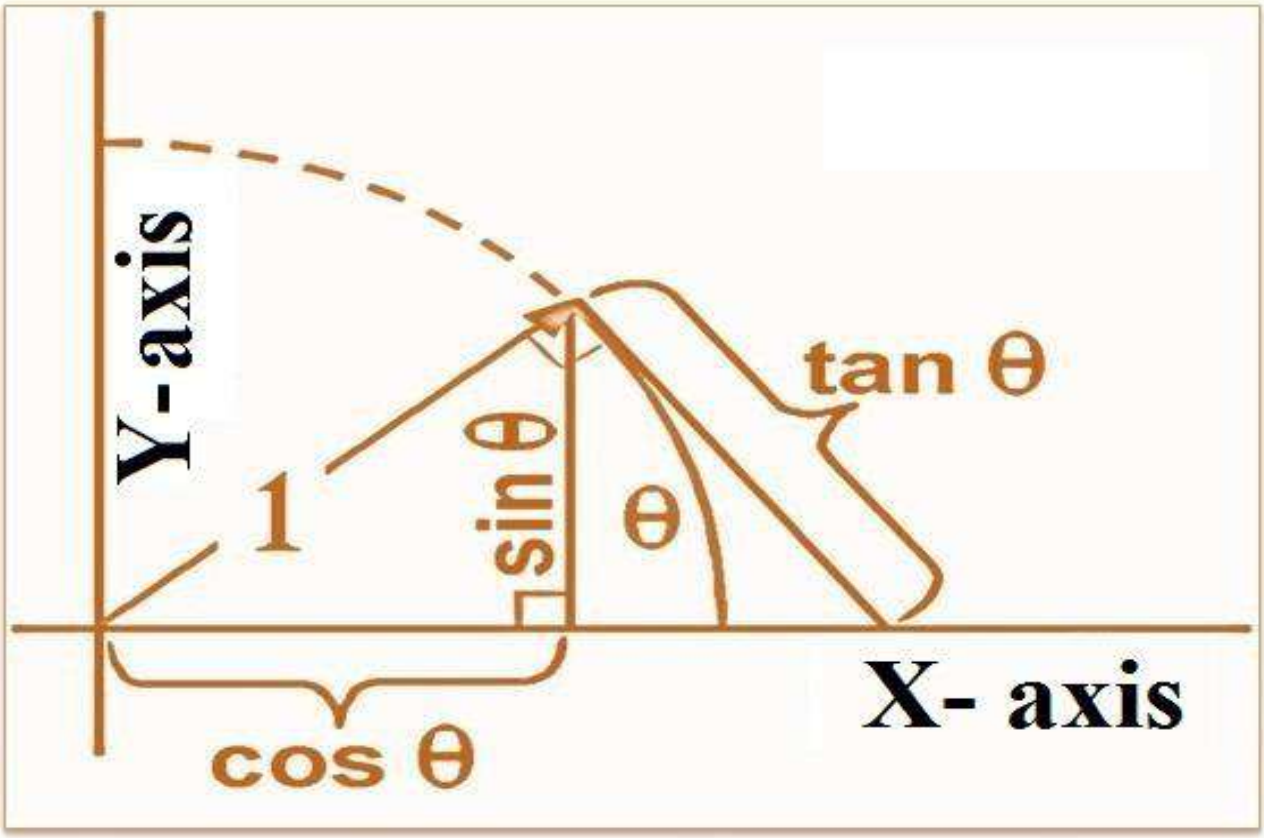
b) $a_1 = 14 \quad r = \frac{7}{4}$

4) إن مجموع المتتالية الهندسية اللانهائية والتي حدها الأول 6 وأساسها $\frac{1}{2}$ يساوي:

a)3 b)4 c)9 d)12

5

الفصل الخامس
المثلثات



الفصل الخامس : المثلثات
Trigonometry

5

المحتوى العلمي للفصل:

[5-1] : الـزاوية.

[5-2] :التقدير الستيني والتقدير الدائري لقياس الزاوية.

[5-3] : العلاقة بين التقديرين الستيني والدائري.

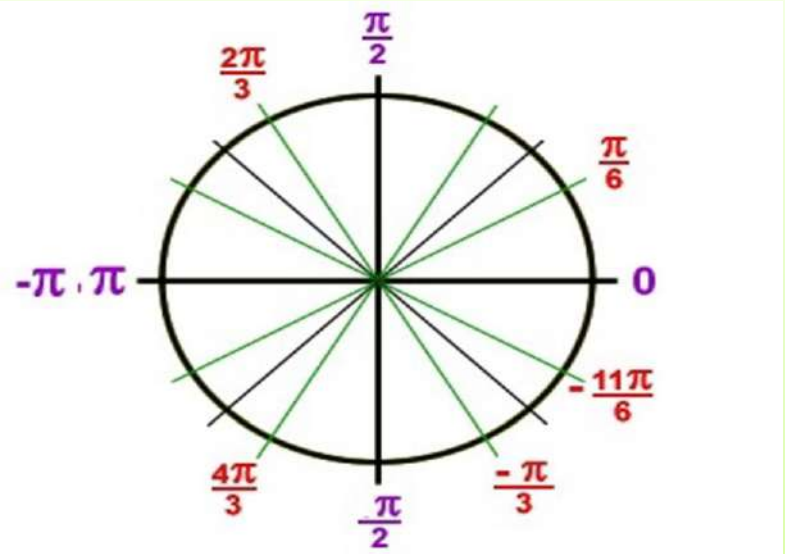
[5-4] : النسب المثلثية لزوايا حادة sin / cos / tan.

[5-5] : بعض العلاقات لحساب المثلثات .

[5-6] : النسب المثلثية للزوايا الخاصة $60°, 45°, 30°$.

[5-7] : دائرة الوحدة والنسب المثلثية للزوايا $360°, 270°, 180°, 90°, 0°$.

[5-8] : النسب المثلثية للزاوية $(180° - \theta)$.



الأهداف السلوكية

ينبغي ان يصبح الطالب في نهاية دراسته لهذا الفصل قادرا على :

- أن يتعرف على مفهوم الزاوية.
- أن يتعرف على مفهوم الزاوية الموجهة والزاوية الموجهة في الوضع القياسي.
- أن يتعرف على نظامي قياس الزاوية،القياس الستيني والقياس الدائري ،ووحدات القياس لكل منهما.
- ان يتمكن من التحويل بين النظامين اعلاه.
- أن يتعرف على مفاهيم النسب المثلثية للزوايا.
- أن يتمكن من الالمام بقيم النسب المثلثية للزوايا الخاصة.
- أن يتمكن من حساب النسب المثلثية لبعض الزوايا.
- أن يتعرف على مفهوم دائرة الوحدة وعلاقتها بالنسب المثلثية .
- أن يتمكن من حساب النسب المثلثية للزاوية $(180^\circ - \theta)$.

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
الزاوية الموجهة	$\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}$
التقدير الستيني والدائري	d , θ°
المثلث ABC	ΔABC
جيب الزاوية θ	$\sin\theta$
جيب تمام الزاوية θ	$\cos\theta$
ظل الزاوية θ	$\tan\theta$
النقطة المثلثية	$(\cos\theta, \sin\theta)$

المقـدمــة

يعتبر موضوع المثلثات وحسابها فرعا مهما من فروع الرياضيات والذي يهتم بالحسابات الخاصة بالمثلث من حيث زواياه واضلاعه.

وقد ظهر هذا العلم منذ زمن بعيد ولم يكن علما مستقلا بذاته وانما كان ضمن مواضيع الرياضيات القديمة وخاصة ضمن موضوع علم الفلك الذي اهتم به الانسان نتيجة لما يتأمله ويراه في الكون من شمس وقمر وكواكب وحركتها.


كلاوديوس بطليموس

فقبل أربعة الآف سنة عرف الحساب المثلثي في مصر وبابل، حيث قاس البابليون الزوايا بالدرجات والدقائق والثواني. وقد عرف المصريون القدماء حالات خاصة لنظرية فيثاغورس , فمثلاً كانوا يعرفون أن المثلث الذي أطوال أضلاعه 3 ، 4 ، 5 من الوحدات الطولية هو مثلث قائم الزاوية واستعملوا هذه القاعدة في عمل الزوايا القوائم عند بنائهم الأهرام.

في القرن الثاني قبل الميلاد وضع الفلكي اليوناني هيباركوس جدول مثلثي لحل المثلثات حيث بدا من الزاوية 7,5° حتى وصل 180° بدرجات مقدارها 7,5° ولم تكن القيمة التي استخدمها هيباركوس لنصف القطر (نق) محددة ,ولكن بعد مضي 300 عام استخدم الفلكي بطليموس قيمة (نق=60) لأن اليونانيين قد أخذوا نظام الأرقام الستينية البابلي, وفي نفس عصر بطليموس تقريبا، طور الهنود نظاما لحساب المثلثات يعتمد على دالة الجيب وليس على دالة الوتر التي اعتمد عليها اليونانيون.

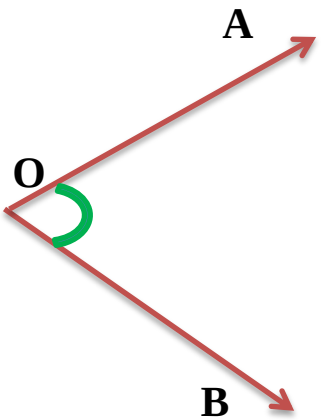

نصيرالدين الطوسي

وفي نهاية القرن الثاني الهجري / الثامن الميلادي، ورث الفلكيون المسلمون التراث اليوناني والهندي واستخدموا دالة الجيب، كما وضعوا العديد من النظريات الأساسية في الحساب المثلثي.

ويذكر بعض المؤرخون ان الرياضي العربي نصير الدين الطوسي هو اول من فصل حساب المثلثات عن الفلك ,ويذكر ان اصطلاح (الظل) مأخوذ من ظلال الاجسام وقد ذكر لاول مرة في القرن الرابع الهجري /العاشر الميلادي من قبل العالم العربي أبو الوفا البوزجاني .

[5-1]: الزاوية Angle

- لقد تعرف الطالب في مراحل دراسية سابقة على مفهوم الزاوية بأنها:
شكل هندسي يتكون من التقاء شعاعين يمثلان ضلعي الزاوية ولهما نقطة بداية واحدة تسمى بـ (رأس الزاوية).

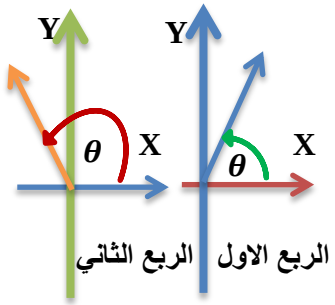


شكل (5-1)

- الشكل (5-1) يمثل زاوية رأسها O وضلعيها $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ و نرمز لها بالرمز (∡AOB) أو (∡BOA) حيث أن :
  - ∡AOB ضلعها الابتدائي (الاول) $\overrightarrow{OA}$, وضلعها النهائي (الثاني) $\overrightarrow{OB}$.
  - ∡BOA ضلعها الابتدائي (الاول) $\overrightarrow{OB}$, وضلعها النهائي (الثاني) $\overrightarrow{OA}$.
  - m∡BOA = m∡AOB.

تعريف[5-1] : الزاوية الموجهة Directed Angle

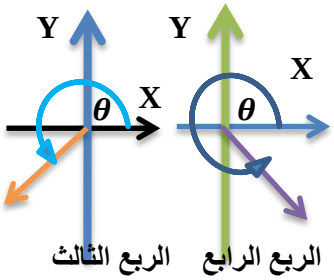
هي الزاوية التي يتم مراعاة الترتيب في ضلعيها عند تسميتهما لتميزها عن الزاوية الاعتيادية.



فمثلا: الشكل(5-1) فيه ∡AOB زاويه موجهة ضلها الاول $\overrightarrow{OA}$ وضلعها الثاني$\overrightarrow{OB}$.

[5-1-1] : الزاوية الموجهة بالوضع القياسي

تكون الزاوية الموجهة في الوضع القياسي في المستوى الديكارتي، إذا كان رأسها نقطة الأصل، وضلع ابتدائها يقع على المحور X الموجب ، وضلع انتهائها يقع في أحد الأرباع الأربعة أو على أحد المحاور. الشكل (5-2)

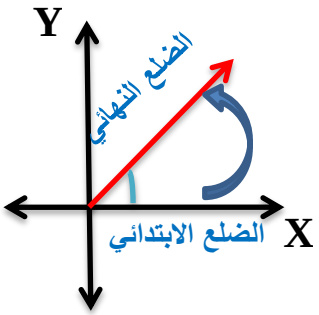


شكل (5-2)

[5-1-2] :القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة

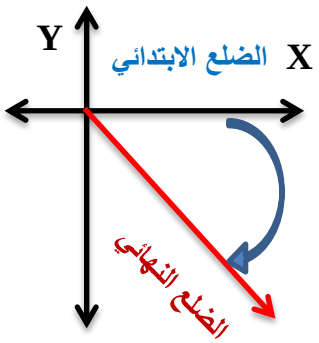
قياس الزاوية الموجهة يكون :

a) موجبا اذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي الى الضلع النهائي عكس دوران عقرب الساعة كما في الشكل(3-5).



شكل (5-3)

b) سالبا اذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي الى الضلع النهائي مع دوران عقرب الساعة كما في الشكل(4-5).



شكل (5-4)

[5-2] : التقدير الستيني والتقدير الدائري لقياس الزاوية

[5-2-1] : قياس الزاوية Measure of Angle

يوجد هناك العديد من الوحدات المختلفة لقياس الزوايا الا ان اهمها واكثرها استخداما هما :

1- التقدير الستيني (القياس الستيني) Degree measure
2- التقدير الدائري (القياس الدائري او النصف قطري) Radian measure

[5-2-1-1] : القياس الستيني Degree Measure

يتم في هذا القياس تقسيم الزاوية التي تمثل دورة كاملة الى (360) قوسا متساويا , قياس كل منها يسمى (درجة ستينية) والتي اعتمدت كوحدة لقياس الزوايا في هذا التقدير والتي يرمز لها بالرمز (1^o).

عليه فان الزاوية القائمة تقابل قوسا طوله يساوي ربع محيط الدائرة لذلك فأن قياس الزاوية القائمة هو (90°) درجة وقياس الزاوية المستقيمة (180°) درجة.

لقد قسمت الدرجة الستينية الواحدة الى (60) وحدة متساوية كل منها تسمى (دقيقة) واحدة ويرمز لها بالرمز (′1), كما قسمت الدقيقة الواحدة الى (60) وحدة متساوية كل منها تسمى (ثانية) واحدة ويرمز لها بالرمز ″1.

أي ان :-

1^{o} = 60 دقيقة =60′

1′ = 60 ثانية =60″

مثـال(1):- اكتب الزاوية التي قياسها (75 درجة و 15 ثانية) بالتقدير الستيني .

الحـل :-

75° 15''

مثـال(2):- اكتب الزاوية التي قياسها (95 درجة و55 دقيقة و20 ثانية) بالتقدير الستيني .

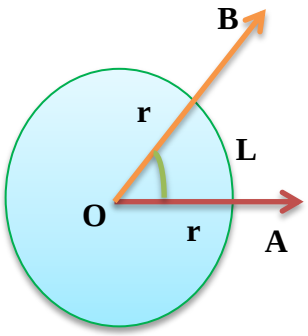
الحـل:-

95° 55' 20''



[5-2-1-2] : القياس الدائري Radian Measure

يعتبر النظام الثاني لقياس الزوايا ويسمى كذلك (بالقياس الدائري او النصف قطري) ويعتمد هذا القياس على طول القوس (L) الذي تحصره زاوية مركزية في دائرة نصف قطرها (r) , كما في الشكل (5-5) حيث ان (∡AOB) زاوية مركزية .

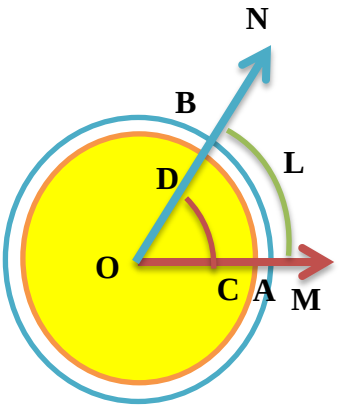


شكل (5-5)

حقيقة هندسية

الدوائر متحدة المركز تكون فيها النسبة بين طول قوس اي زاوية مركزية وطول نصف قطر دائرتها المناظرة تساوي مقدارا ثابتا. كما في الشكل(5-6) حيث أن :-

$$\frac{\overset{\frown}{MN}}{OM} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{OA} = \frac{\overset{\frown}{CD}}{OC} = \text{مقدارا ثابتا}$$



شكل (5-6)

عليه فأن :-

$$\text{مقدارا ثابتا} = \frac{\text{طول القوس الذي تحصره الزاوية المركزية}}{\text{طول نصف قطر دائرتها}}$$

تعريف [5-2] : القياس الدائري Radian Measure

هو النسبة بين طول القوس (L) الذي تحصره الزاوية المركزية في دائرة ما ونصف قطر تلك الدائرة (r) والذي نرمز له بالرمز (d) .

عليــه فأن :-

$$|d| = \frac{L}{r} \quad \Rightarrow \quad L = |d| \times r$$

حيث أن :-

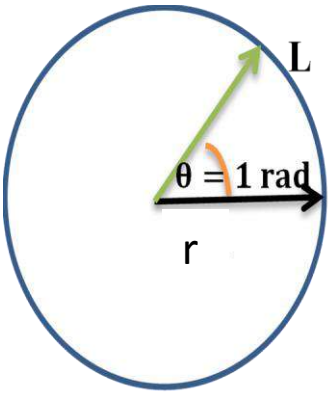
L = يمثل طول القوس الذي تحصره الزاوية المركزية.

r = يمثل نصف قطر الدائرة .

d = يمثل القياس الدائري (النصف قطري) للزاوية المركزية .

تعريف [5-3] : الزاوية نصف القطرية

تسمى الزاوية المركزية في دائرة ما والتي تحصر قوسا طوله يساوي نصف قطر هذه الدائرة بالزاوية نصف القطرية ويرمز لها بالرمز rad . كما في الشكل (5-7)



شكل (5- 7)

ملاحظة

تسمى وحدة قياس الزوايا في التقدير الدائري بالـ (الزاوية نصف القطرية).

ملاحظة

- **اذا كان L = r فأن قياس الزاوية بالتقدير الدائري =1 زاوية نصف قطرية .**
- **اذا كان L = 2r فأن قياس الزاوية بالتقدير الدائري = 2 زاوية نصف قطرية ... الخ.**

مثـــال(3):- زاوية مركزية في دائرة طول نصف قطرها (15cm)تحصر قوسا طوله (30cm) , جد قياس الزاوية بالتقدير الدائري.

الحـل:- $L=30\ cm \quad , \quad r=15\ cm$

$$d = \frac{L}{r} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{30cm}{15cm} = 2\ rad$$ من الزوايا نصف القطرية

مثـــال(4):- زاوية مركزية قياسها (4 rad) من الزوايا نصف القطرية تحصر قوسا طوله (12 cm) , جد طول نصف قطر الدائرة .

الحـل:- $d=4 \quad , \quad L=12\ cm$

$$d = \frac{L}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{L}{d} \Rightarrow r = \frac{12}{4} = 3\ cm$$

[5-3] : العلاقة بين التقديرين الستيني والدائري للزوايا

بالاعتماد على معرفتنا السابقة بأن محيط الدائرة التي نصف قطرها (r) يساوي $(2\pi r)$ و أن هذا المحيط يقابل الزاوية المركزية التي قياسها الستيني يساوي (360^o) وطول قوسها $(2\pi r)$, عليه فأن قياسها الدائري يساوي (2π) زاوية نصف قطرية.

بحيث أن :

$$d = \frac{L}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

- بمعنى ان (2π) من الزوايا نصف القطرية بالقياس الدائري تعادل (360^o) بالقياس الستيني ومن ذلك نستنتج أن :-

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \simeq 0.0175\ rad$$ (نصف قطرية)

$$1\ rad = \frac{180^\circ}{\pi} \simeq 57.2957^\circ$$

حيث ان:-

$$\pi = \frac{22}{7} \simeq 3.14$$



ملاحظة

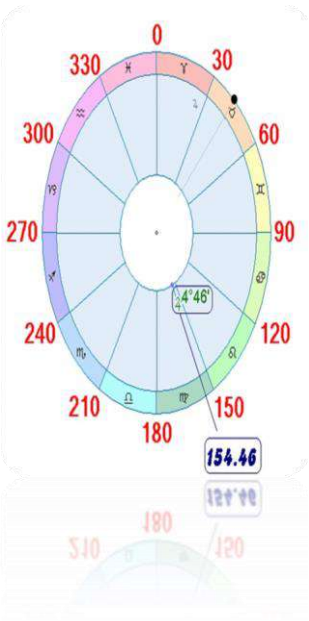
نصف قطرية : $360° = 2\pi \ \ rad$

نصف قطرية : $180° = \pi \ rad$

نصف قطرية : $90° = \frac{\pi}{2} \ \ rad$

[5-3-1] : التحويل من القياس الستيني الى الدائري وبالعكس

اذا كانت لدينا زاوية قياسها الستيني (θ°) وقياسها الدائري (d) زاوية نصف قطرية, عليه يمكن أستخدام العلاقة الاتية لتحويل قياس الزاوية من القياس الستيني الى الدائري وبالعكس :-



$$\frac{d}{\theta^{\circ}} = \frac{\pi}{180^{\circ}} \quad \dots \quad (1)$$

من العلاقة (1) نحصل على العلاقتين (2) و (3) :-

$$d = \frac{\pi}{180^{\circ}} \times \theta^{\circ} \quad \dots (2)$$

$$\theta^{\circ} = d \times \frac{180^{\circ}}{\pi} \quad \dots (3)$$

حيث ان :-

- العلاقة (2) تستخدم للتحويل الى القياس الدائري.
- العلاقة (3) تستخدم للتحويل الى القياس الستيني.

مثال(5):- زاوية قياسها الدائري (5 rad) من الزوايا نصف القطرية ، جد القياس الستيني لها .

الحـل:-

$$\theta^\circ = d \times \frac{180^\circ}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \theta^\circ = 5 \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\Rightarrow \theta^\circ \simeq 286.36^\circ$$

مثال(6):- زاوية قياسها الدائري ($\frac{1}{2}\pi$) من الزوايا نصف القطرية ، جد القياس الستيني لها .

الحـل:-

$$\theta^\circ = d \times \frac{180^\circ}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \theta^\circ = \frac{1}{2}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\Rightarrow \theta^\circ = 90^\circ$$

مثال(7):- حول الزوايا نصف القطرية الاتية الى القياس الستيني :

$$(1.1\pi \ , \ \frac{3}{4}\pi \ , \ 3.5\pi)$$

الحـل:-

a) $\theta^\circ = d \times \frac{180^\circ}{\pi} \Rightarrow \theta^\circ = 1.1\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} \Rightarrow \theta^\circ = 198^\circ$

b) $\theta^\circ = d \times \frac{180^\circ}{\pi} \Rightarrow \theta^\circ = \frac{3}{4}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} \Rightarrow \theta^\circ = 135^\circ$

c) $\theta^\circ = d \times \frac{180^\circ}{\pi} \Rightarrow \theta^\circ = 3.5\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} \Rightarrow \theta^\circ = 630^\circ$

مثال(8):- زاوية قياسها الستيني (75°) , جد قياسها الدائري .

الحـل:-

$$d = \frac{\pi}{180^\circ} \times \theta^\circ \Rightarrow d = \frac{\pi}{180^\circ} \times 75^\circ$$

$$\Rightarrow d = \frac{5}{12}\ \pi \quad \text{rad: زاوية نصف قطرية}$$

مثال(9):- زاوية قياسها الستيني (225°) , جد قياسها الدائري.

الحـل:-

$$d = \frac{\pi}{180^\circ} \times \theta^\circ \Rightarrow d = \frac{\pi}{180^\circ} \times 225^\circ$$

$$\Rightarrow d = \frac{5}{4}\ \pi \quad \text{rad: زاوية نصف قطرية}$$

مثال(10):- حول الزوايا الآتية من القياس الستيني الى القياس الدائري :

$(320^\circ, 140^\circ, 60^\circ)$

الحـل:-

a) $d = \frac{\pi}{180^\circ} \times \theta^\circ \Rightarrow d = \frac{\pi}{180^\circ} \times 320^\circ$

$\Rightarrow d = \frac{16}{9}\ \pi$ rad: زاوية نصف قطرية

b) $d = \frac{\pi}{180^\circ} \times \theta^\circ \Rightarrow d = \frac{\pi}{180^\circ} \times 140^\circ$

$\Rightarrow d = \frac{7}{9}\ \pi$ rad: زاوية نصف قطرية

c) $d = \frac{\pi}{180^\circ} \times \theta^\circ \Rightarrow d = \frac{\pi}{180^\circ} \times 60^\circ$

$\Rightarrow d = \frac{\pi}{3}$ rad: زاوية نصف قطرية

مثال(11):- زاوية مركزية تحصر قوسا طوله (28 cm) في دائرة طول قطرها (24 cm) ، جد قياسها الدائري وقياسها الستيني .

الحـل:-

نجد القياس الدائري للزاوية المركزية كما يأتي :-

$$d = \frac{L}{r} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{28\ cm}{12\ cm}$$

$$\Rightarrow d \simeq 2.3$$ زاوية نصف قطرية

ثم نجد القياس الستيني كما يأتي:-

$$\theta^\circ = d \times \frac{180^\circ}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \theta^\circ = 2.3 \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\Rightarrow \theta^\circ \simeq 131.84^\circ$$

مثال(12):- زاوية مركزية قياسها (140°) في دائرة طول نصف قطرها(10cm) ، جد طول القوس المقابل لهذه الزاوية .

الحـل:- **نقوم في بداية الحل بايجاد القياس الدائري كما يأتي:**

$$d = \frac{\pi}{180^\circ} \times \theta^\circ \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\pi}{180^\circ} \times 140^\circ$$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{7}{9}\ \pi$$ زاوية نصف قطرية

نقوم بعد ذلك بايجاد طول القوس (L) كما يأتي:

$$d = \frac{L}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{7}{9}\ \pi = \frac{L}{10}$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{7}{9}\ \pi \times 10 \quad \Rightarrow \quad L \simeq 24.4\ cm$$

مثال(13):- زاوية مركزية قياسها $(120°)$ وطول القوس المقابل لها $(8cm)$ ،جد نصف قطر دائرتها .

الحـل:-

نقوم في بداية الحل بايجاد القياس الدائري كما يأتي:

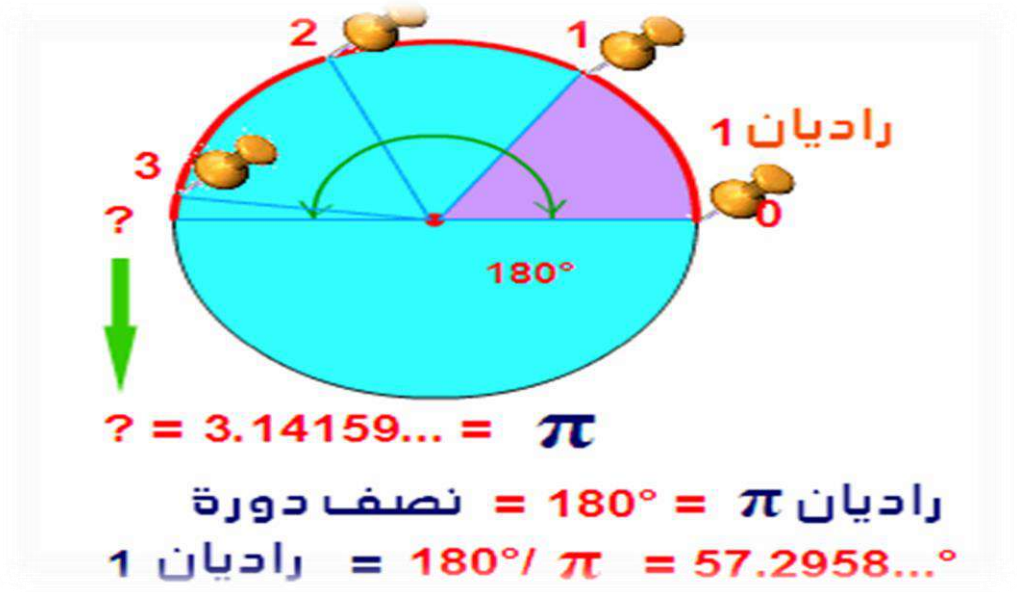
$$d = \frac{\pi}{180°} \times \theta° \Rightarrow d = \frac{\pi}{180°} \times 120°$$

$$\Rightarrow d = \frac{2}{3}\pi \quad \text{زاوية نصف قطرية}$$

نقوم بعد ذلك بايجاد نصف القطر (r) كما يأتي:

$$d = \frac{L}{r} \Rightarrow \frac{2}{3}\pi = \frac{8}{r}$$

$$\Rightarrow r = \frac{24}{2\pi} \Rightarrow r \simeq 3.82\ cm$$



تمـــارين [1-5]

1) حول الزوايا الآتية من التقدير (القياس) الستيني الى التقدير (القياس) الدائري :

a) 45° b) 200° c) 165° d) 100°

2) حول الزوايا النصف قطرية الآتية من التقدير الدائري الى التقدير الستيني :

a) $\frac{5}{8}\ \pi$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{7}{6}\ \pi$ d) $\frac{1}{5}$

3) دائرة طول نصف قطرها (10 cm) جد القياس الدائري والستيني للزاوية المركزية التي تقابل قوسا طوله (15 cm) .

4) زاوية مركزية قياسها (120°) في دائرة طول نصف قطرها (15 cm) ، جد طول القوس المقابل لهذه الزاوية .

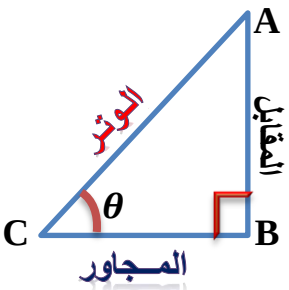
5) جد التقدير الدائري للزاوية المركزية التي تحصر قوسا طوله (20 cm) في دائرة نصف قطرها (12 cm) .

6) زاوية مركزية تحصر قوسا طوله (25 cm) في دائرة طول قطرها (20 cm) ،جد قياسها الدائري وقياسها الستيني .

[5-4] :النسب المثلثية لزوايا حادة sin /cos /tan

خلال المراحل الدراسية السابقة تعلمت ان المثلث هو شكل هندسي مكون من ستة عناصر هي اضلاعه الثلاثة وزواياه الثلاث .

الشكل (5-8) فيه ΔABC قائم الزاوية في B وفيه الضلع $\overline{AB}$ يقابل الزاوية الحادة (θ) ويسمى بالضلع (المقابل) والضلع $\overline{BC}$ يجاور الزاوية (θ) ويسمى بالضلع (المجاور) ويسمى الضلع $\overline{AC}$ الذي يقابل الزاوية القائمة بالوتر اي ان :



شكل (5-8)

$\overline{AB}$ = المقابل

$\overline{BC}$ = المجاور

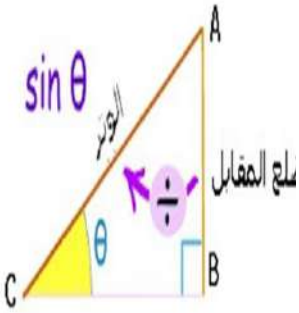
$\overline{AC}$ = الوتر

[5-4-1] :النسب المثلثية

ان النسب المثلثية المرتبطة بالزاوية الحادة (θ) عديدة الا اننا سنتناول ثلاث نسب مهمة هي (جا θ = $\sin\theta$, جتا θ = $\cos\theta$, ظا θ = $\tan\theta$) حيث ان كل واحدة من هذه النسب تمثل النسبة بين اثنين من اطوال اضلاع المثلث ΔABC .

تعريف[5-4]: جيب الزاوية Sine

تسمى النسبة بين طول الضلع المقابل للزاوية الحادة (θ) في ΔABC قائم الزاوية وطول الوتر بجيب الزاوية ويرمز له بالرمز $(\sin\theta)$.



اي ان :-

جيب الزاوية θ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ويكتب :

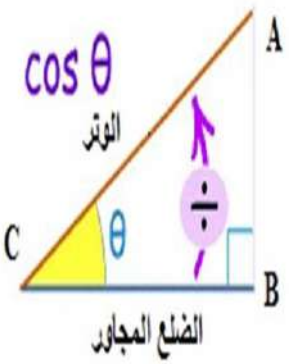
$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{AC}$$

تعريف [5-5] : جيب تمام الزاوية Cosine

تسمى النسبة بين طول الضلع المجاور للزاوية الحادة (θ) في ΔABC قائم الزاوية وطول الوتر بجيب تمام الزاوية ويرمز له بالرمز $(\cos\theta)$.

اي ان :-

جيب تمام الزاوية θ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ويكتب :



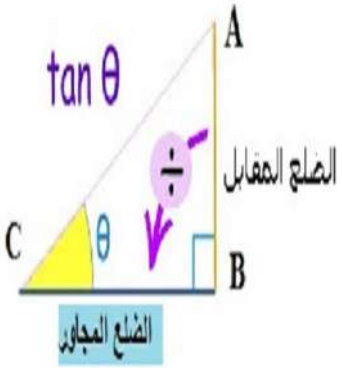
$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{BC}{AC}$$

تعريف [5-6] : ظل الزاوية Tangent

تسمى النسبة بين طول الضلع المقابل للزاوية الحادة (θ) والضلع المجاور لها في ΔABC القائم الزاوية بظل الزاوية والذي يرمز له بالرمز $(\tan\theta)$.

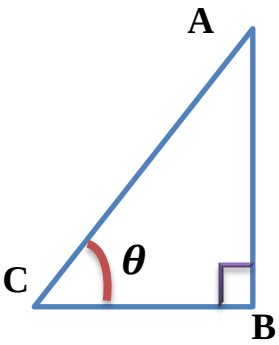
اي ان :-

ظل الزاوية θ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ ويكتب :



$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{AB}{BC}$$

[5-5] : بعض العلاقات لحساب المثلثات



شكل (5-9)

ΔABC قائم الزاوية في B (شكل 5-9) فيه الزاوية (θ) زاوية حادة , بتطبيق مبرهنة فيثاغورس عليه نجد أن :

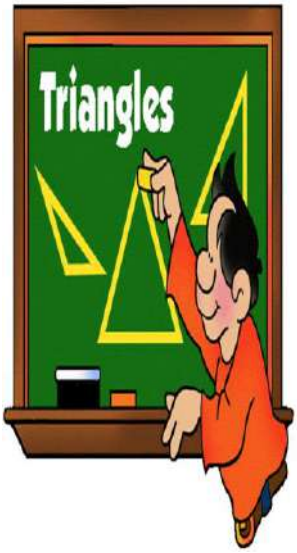
$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

وبقسمة الطرفين على $(AC)^2$ نحصل على :-

$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = 1$$

والذي يعطينا العلاقة التالية :-

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$



ـ لاحظ انه يمكن الحصول على ظل الزاوية الحادة θ $(\tan\theta)$ باستخدام العلاقات التالية :-

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

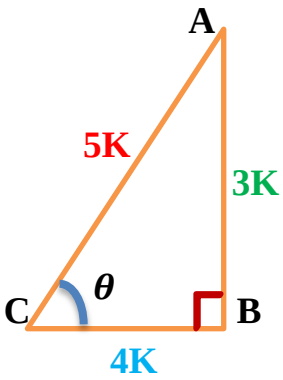
ـ بقسمة كل من الضلع المقابل (AB) والضلع المجاور (BC) على الوتر (AC) نحصل على العلاقة التالية:-

$$\tan\theta = \frac{(AB/AC)}{(BC/AC)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

مثال(14):- الشكل المجاور فيه ΔABC قائم الزاوية في B و الزاوية (θ) زاوية حادة ، احسب كل مما يأتي :

a) $\sin\theta$ b) $\cos\theta$ c) $\tan\theta$



الحـل :-

a) $\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{3K}{5K} = \frac{3}{5}$

b) $\cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{4K}{5K} = \frac{4}{5}$

c) $\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{3K}{4K} = \frac{3}{4}$

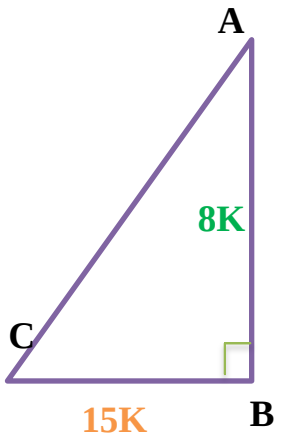
مثال(15):- ΔABC قائم الزاوية في B ، فاذا علمت ان ($\tan c = \frac{8}{15}$) ,

أحسب كل مما يأتي :

a) $\overline{AC}$ b) $\sin A$ c) $\cos A$ d) $\sin C$ e) $\cos C$

الحـل:-

نرسم ΔABC قائم الزاوية في B وباستخدام ($\tan c = \frac{8}{15}$) نجد ان:-



$AB = 8K$, $BC = 15K$

a):- ولايجاد AC نستخدم مبرهنة فيثاغورس :

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$\Rightarrow (AC)^2 = (8k)^2 + (15k)^2$

$\therefore AC = 17k$

b) $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{15K}{17K} = \frac{15}{17}$

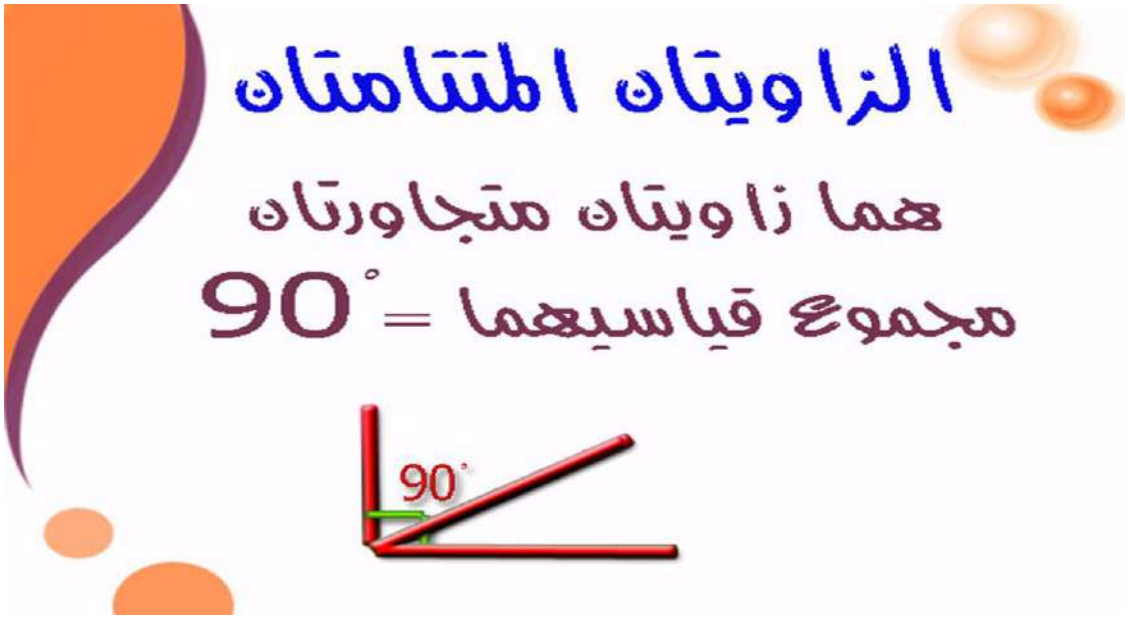
c) $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{8K}{17K} = \frac{8}{17}$

d) $\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{8K}{17K} = \frac{8}{17}$

e) $\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{15K}{17K} = \frac{15}{17}$

حقيقة هندسية

الزاويتان اللتان مجموعهما يساوي (90°) هما زاويتان متتامتان ويكون جيب احدهما يساوي جيب تمام الاخرى والعكس صحيح .

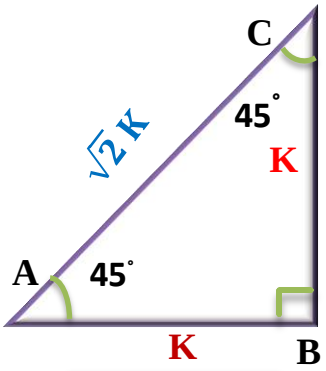


[5-6] : النسب المثلثية للزوايا الخاصة($30°, 45°, 60°$)

تعتبر الزوايا الخاصة ($30°, 45°, 60°$) زوايا ذات اهمية بالغة في موضوع حساب المثلثات , عليه سنتناول كل من هذه الزوايا بشيءٍ من التفصيل , وكما يأتي:

[5-6-1] :الزاوية التي قياسها $45°$

ΔABC قائم الزاوية في B والمتساوي الســـاقين فيه قياس كل من الزاويتين الباقيتين يساوي ($45°$) الشكل (5-10).



الشكل 5-10

ـ فأذا فرضنا ان :

$$AB = BC = K$$

ـ وباستخدام مبرهنة فيثاغورس نجد طول AC حيث ان:-

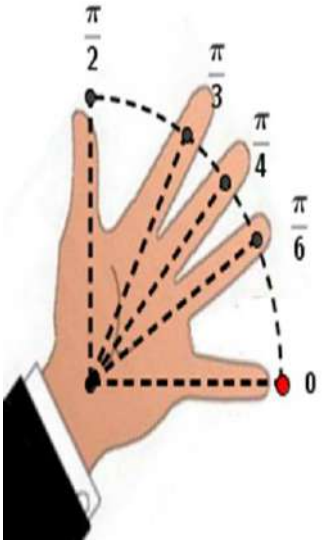
$$AC = \sqrt{2}\ K$$

ـ عليه فأن النسب المثلثية للزاوية ($45°$) هي :-

$$\sin 45° = \frac{AB}{AC} = \frac{K}{\sqrt{2}\,K} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{BC}{AC} = \frac{K}{\sqrt{2}\,K} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = \frac{AB}{BC} = \frac{K}{K} = 1$$



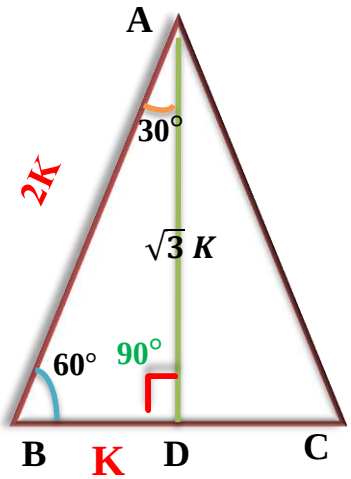
[5-6-2] : الزاوية التي قياسها(30°) والزاوية التي قياسها (60°)

ΔABC متساوي الاضلاع فيه طول كل ضلع يساوي ($2K$) وقياس كل زاوية من زواياه تساوي (60°) . فاذا رسمنا ($\overline{AD} \perp \overline{BC}$) كما في الشكل (5-11) فأننا سوف نجد ان :-

$$m\measuredangle CAD = m\measuredangle BAD = 30°$$

كذلك فان :- $BD = DC = K$

ـ وباستخدام مبرهنة فيثاغورس نجد ان :- $AD = \sqrt{3}\,K$



الشكل (5-11)

ـ عليه فان النسب المثلثية ستكون كما يأتي:-

(a النسب المثلثية للزاوية (30°) هي :-

$$\sin 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{K}{2K} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}\,K}{\sqrt{2}\,K} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{BD}{AD} = \frac{K}{\sqrt{3}\,K} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(b النسب المثلثية للزاوية (60°) هي:-

$$\sin 60° = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}\,K}{\sqrt{2}\,K} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{BD}{AB} = \frac{K}{\sqrt{2}K}\ \frac{1}{2}$$

$$\tan 60° = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{3}\,K}{K} = \sqrt{3}$$

عليه يمكن وضع النسب المثلثية للزوايا الخاصة ($30°, 45°, 60°$) بالجدول الاتي:

النسب المثلثية \ الزاوية	$30°$	$45°$	$60°$
Sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

جـــــدول (1-5)

مثال(16):- جد القيمة العددية لما يأتي: $\sin 30° \cos 60° + \sin 45° \cos 45°$

الحـل :-

$$\sin 30° \cos 60° + \sin 45° \cos 45° = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4}$$

مثال(17):- جد القيمة العددية لما يأتي :- $\cos 30° \tan 60° + \sin^2 45°$

الحـل :-

$$\cos 30° \tan 60° + \sin^2 45° = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 2$$

مثال(18):- جد القيمة العددية لما يأتي : $\sin^2 45° + \cos^2 45° + \tan^2 60°$

الحـــل:-

$$\sin^2 45° + \cos^2 45° + \tan^2 60° = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\sqrt{3})^2$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 3$$
$$= 4$$

مثال(19):- جد القيمة العددية لما يأتي : $\sin 60° \cos 30° + \cos 60 \sin 30°$

الحـــل :-

$$\sin 60° \cos 30° + \cos 60 \sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$
$$= 1$$

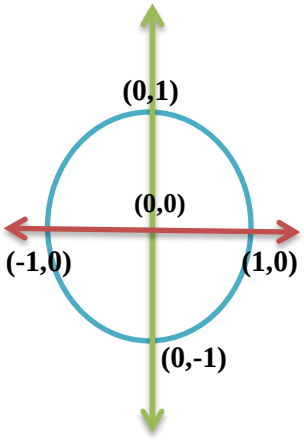
مثال(20):- جد القيمة العددية لما يأتي :-

$\sqrt{2}\,(\cos^2 45° + 2\sin^2 45) + \tan^2 45°$

الحـــل :-

$$\sqrt{2}\,(\cos^2 45° + 2\sin^2 45) + \tan^2 45° = \sqrt{2}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) + (1)^2$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2}\right) + 1$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{3}{2}\right) + 1$$
$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} + 1$$
$$= \frac{3\sqrt{2} + 2}{2}$$

[5-7] : دائرة الوحدة والنسب المثلثية للزوايا :
$(360°, 270°, 180°, 90°, 0°)$



شكل (5-12)

تعريف [5-7] : دائرة الوحدة The Unit Circle

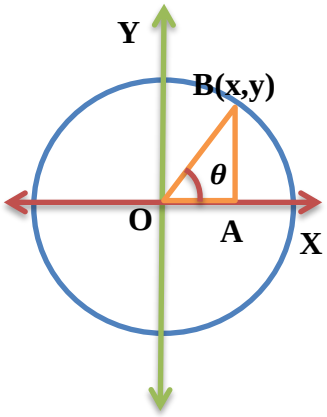
هي الدائرة التي يكون مركزها نقطة الاصل (0,0) ونصف قطرها يساوي وحدة طولية واحدة . شكل (5-12)

[5-7-1]: دائرة الوحدة والنسب المثلثية

ـــــباستخدام دائرة الوحدة نعمل على اعادة تعريف النسب المثلثية بأعتبارها دوال مثلثية وكما يأتي :

ـــالشكل (5-13) فيه الزاوية θ ($\measuredangle AOB$) زاوية موجهة في وضعها القياسي حيث رأسها هو نقطة الاصل وضلعها الابتدائي $\overrightarrow{OA}$ وضلعها النهائي $\overrightarrow{OB}$.

ـ لتكن (x,y) احداثيي النقطة B اي ان : $B = (x, y)$



الشكل (5-13)

وعليه تكون الدوال المثلثية للزاوية الموجهة θ كالاتي :

$$\sin\theta = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\theta = \frac{x}{1} = x$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

ـ مما تقدم فأن احداثيي النقطة B تكون :

$$B = (x, y) = (\cos\theta, \sin\theta) \quad \dots (1)$$

تعريف [5-8] :النقطة المثلثية TRIGONOMETRIC POINT

هي نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية الموجهة بالوضع القياسي مع دائرة الوحدة.

عليه فأن B هي نقطة مثلثية للزاوية $\measuredangle AOB$.

مثـال(21):- لتكن U دائرة وحدة وفيها الزاويةالموجهة θ (∢AOB) في وضعها القياسي و النقطة B تنتمي الى الدائرة واحداثييها $B = (0.6, 0.8)$ ، فجد كل مما يأتي: (a) $\sin\theta$ (b) $\cos\theta$ (c) $\tan\theta$

الحـل:-

من العلاقة (1) نجد ان:

$\because (x, y) = (\cos\theta, \sin\theta) \Rightarrow (0.6, 0.8) = (\cos\theta, \sin\theta)$

(a) $\sin\theta = 0.8$

(b) $\cos\theta = 0.6$

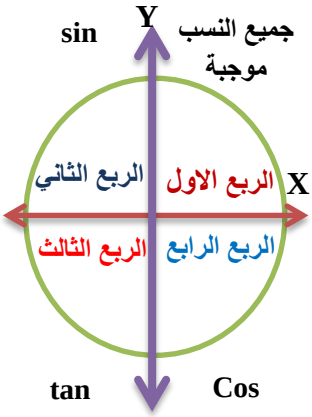
(c) $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{0.8}{0.6} = \frac{4}{3}$

[5-7-2] : دائرة الوحدة واشارات الدوال المثلثية

- يمكن تحديد اشارات الدوال المثلثية ($\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$) باعتماد دائرة الوحدة الربع الذي تقع فيه الزاوية (كما في الشكل (5-14)) وكما في الجدول (5-2):

الدالـــة	sin	cos	tan
الربع الاول	+	+	+
الربع الثاني	+	-	-
الربع الثالث	-	-	+
الربع الرابع	-	+	-

جـــدول (5-2)

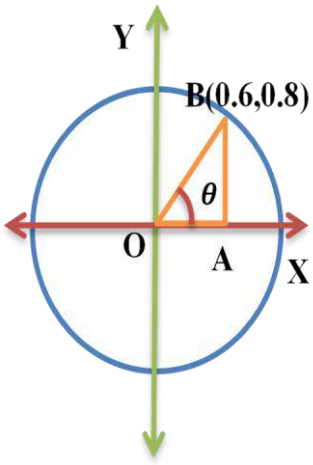


شكل (5-14)

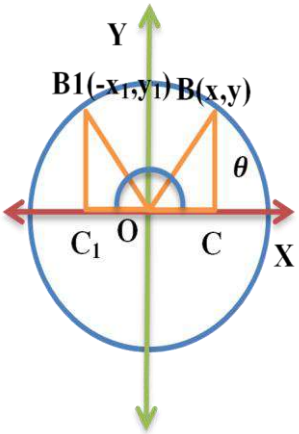
- يمكن وضع النسب المثلثية للزوايا $(360°, 270°, 180°, 90°, 0°)$ في الجدول (5-3) وكما يأتي :-

الزاوا / النسب المثلثية	0°	90°	180°	270°	360°
sin	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1
tan	0	غير معرف	0	غير معرف	0

جـــدول (5-3)



[5-8] : النسب المثلثية للزاوية $(180^\circ - \theta)$ حيث إن: $\theta \in [0, 90^\circ)$



الشكل (5-15)

ـ باستخدام دائرة الوحدة (الشكل (5-15)) والتي مركزها (O) وفيها $\sin\theta = y$ وكذلك $\cos\theta = x$ وبأعتماد تطابق المثلثين القائمي الزاوية ΔBOC و ΔB_1OC_1 ونستنتج أن :-

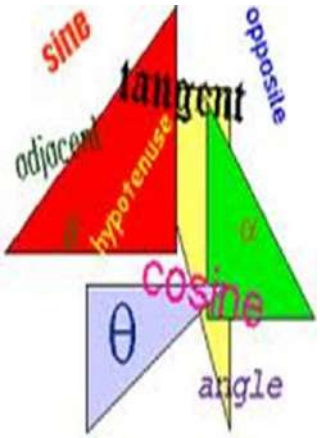
$$BC = B_1C_1 \quad ، \quad CO = C_1O$$

عليه فأن :-

$$x_1 = -x \quad ، \quad y_1 = \sin\theta$$

ـ بالاعتماد على ما تقدم يمكن ايجاد النسب المثلثية للزوايا التي تقع في الربع الثاني والتي تكون جميعا سالبة عدا $\sin\theta$ الذي يكون موجب وكما يأتي:-

1) $\sin(180^\circ - \theta) = y_1 = \sin\theta$



$$\therefore \sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$$

2) $\cos(180^\circ - \theta) = x_1 = -x = -\cos\theta$

$$\therefore \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$$

ـ من (1) و (2) نجد قيمة $\tan(180^\circ - \theta)$ وكما ياتي:-

$$\tan(180^\circ - \theta) = \frac{\sin(180^\circ - \theta)}{\cos(180^\circ - \theta)} = \frac{\sin\theta}{-\cos\theta}$$
$$= -\tan\theta$$

$$\therefore \tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$$

مثال(22):- جد القيمة العددية لكل مما يأتي :-

a) $\sin 135°$ b) $\cos 120°$ c) $\tan 150°$

الحـــل :-

a) $\sin 135° = \sin(180° - 45°)$

$$= \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) $\cos 120° = \cos(180° - 60°)$

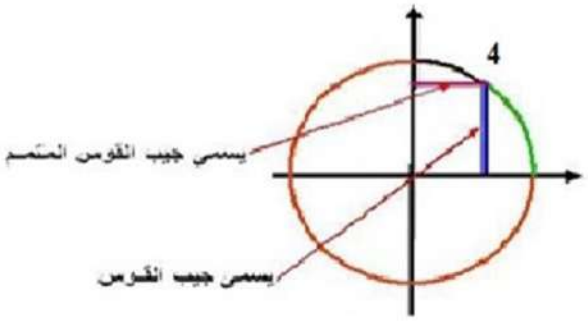
$$= -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

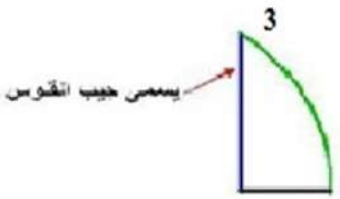
c) $\tan 150° = \tan(180° - 30°)$

$$= -\tan 30 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$









تمـــارين [2-5]

1) جد القيمة العددية لكل مما يأتي :-

a) $\sin 30° \cos 60° + \sin 90° - \cos^2 90°$

b) $\cos 30° \tan 60° + \sin^2 45° - \cos 90°$

c) $\cos 90° + 2\cos 45° + 4\cos 60°$

d) $(\sin 30° + \cos 60°)(3\sin 60° - \tan 30°)$

e) $2\sin 30° + \cos^2 60° - \tan^2 45°$

2) جد القيمة العددية لكل مما يأتي :-

a) $\sin 120°$, $\tan 120°$

b) $\cos 135°$, $\tan 135°$

c) $\sin 150°$, $\cos 150°$

3) ΔABC قائم الزاوية في B , فيه الزاوية (θ) زاوية حادة , فأذا علمت أن $(\sin\theta = \frac{4}{7})$, أوجد قيمة كل من $\cos\theta$, $\tan\theta$ ؟

4) جد القيمة العددية لكل من المقادير الاتية :-

a) $\sin 150° + \sin 120°$

b) $\sin 135° - \cos 150°$

c) $\tan 120° - \tan 150° - \tan 135°$

5) أثبت أن :-

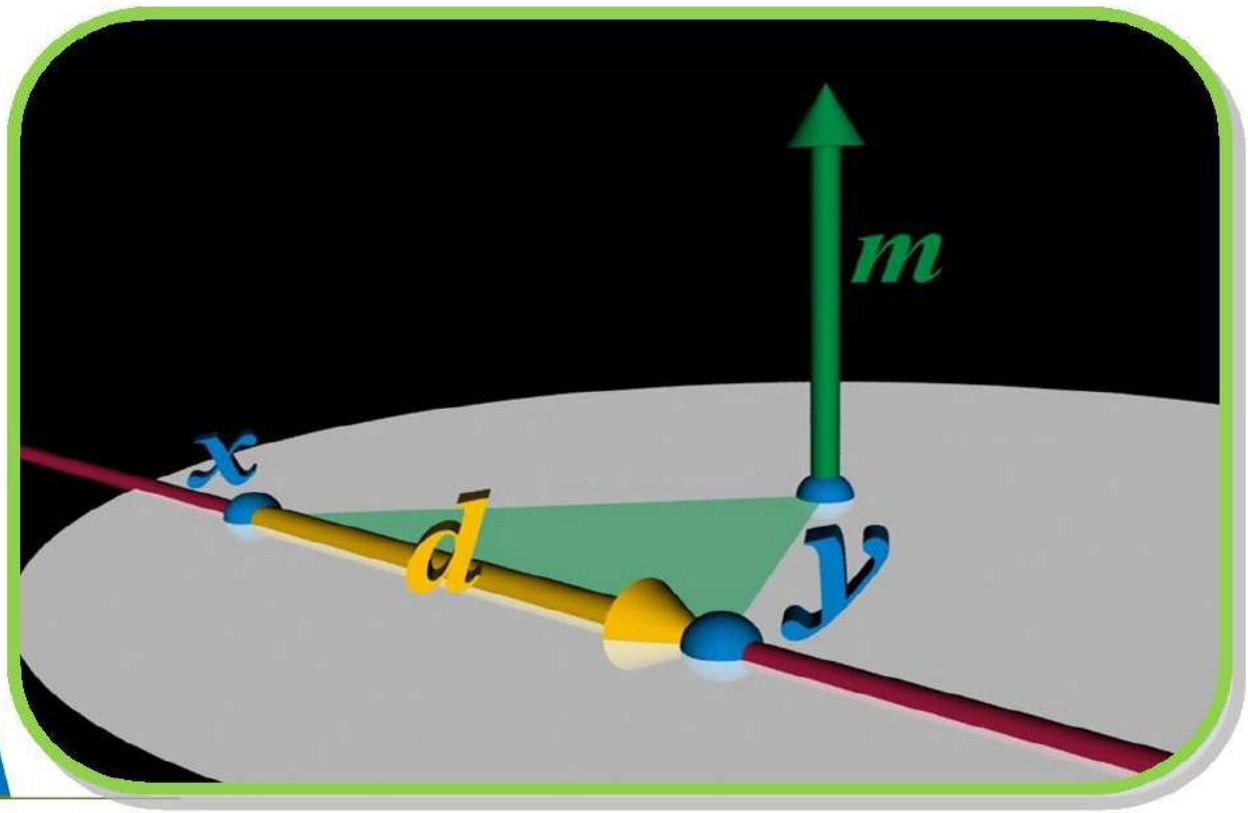
a) $\sin 30° \cos 60° + \cos 30° \sin 60° = \sin 90°$

b) $2\sin 30° \cos 60° = \sin 60° \tan 30°$

c) $\tan 60° = \frac{2\tan 30°}{1 - \tan^2 0°}$

6

الفصل السادس
الهندسة الاحداثية



الفصل السادس: الهندسة الأحداثية

6 Coordinated Geometry

المحتوى العلمي للفصل:

[6-1] : زاوية الميل.

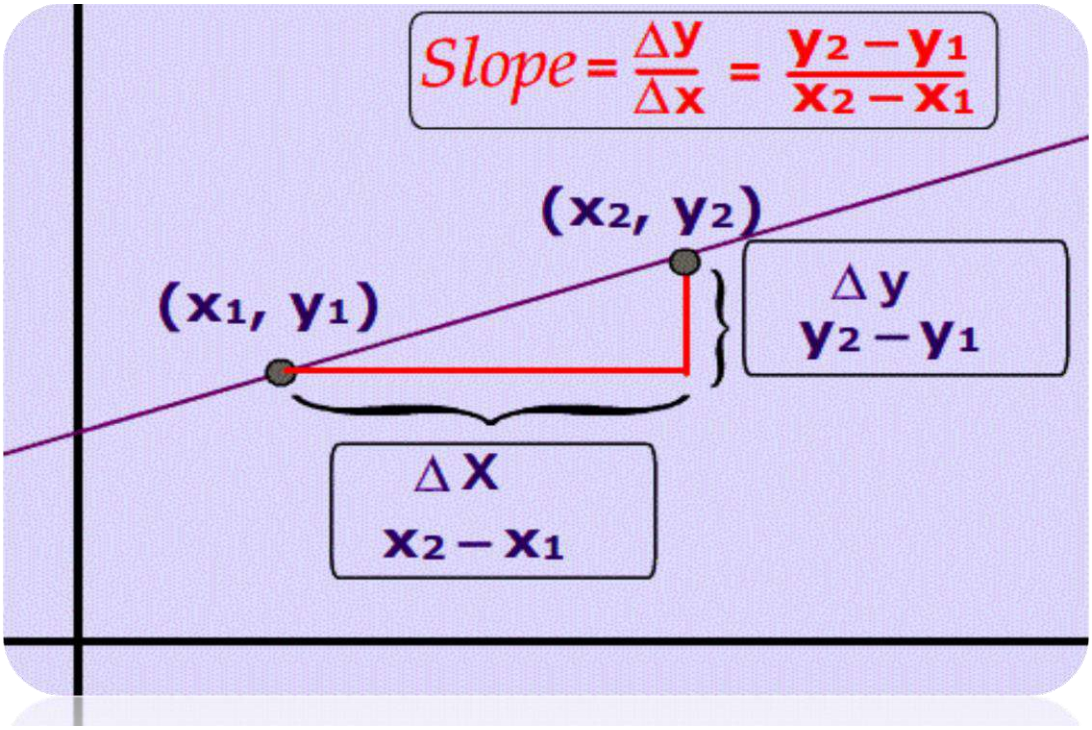
[6-2] : ميل المستقيم.

[6-3] : معادلة المستقيم الذي يمر بنقطتين .

[6-4] : معادلة المستقيم اذا علم ميله ونقطة عليه.

[6-5] : أستنتاج ميل المستقيم من معادلته .

[6-6] : العلاقة بين ميلي المستقيمين المتوازيين أو المتعامدين.



الأهداف السلوكية

ينبغي ان يصبح الطالب في نهاية دراسته لهذا الفصل قادراً على :

- ❖ أن يتعرف على زاوية الميل.
- ❖ أن يتعرف على مفهوم ميل المستقيم وكيفية إيجاده.
- ❖ ان يتعرف على معادلة المستقيم الموازي للمحور X أو المحور Y.
- ❖ أن يتعرف على معادلة المستقيم إذا علمت نقطتين عليه.
- ❖ أن يتعرف على كيفية إيجاد معادلة المستقيم اذا علم ميله ونقطة عليه.
- ❖ أن يتعرف على كيفية إيجاد معادلة المستقيم اذا علم ميله ومقطعه على محور X أو مقطعه على محور Y.
- ❖ أن يتعرف على شرط التوازي أو التعامد للمستقيمات في المستوى الإحداثي.

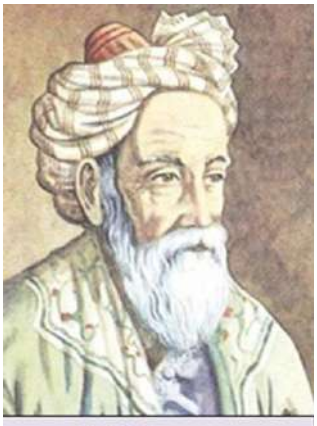
المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
❖ زاوية ميل المستقيم	θ
❖ ميل المستقيم $\overline{AB}$	$m_{\overline{AB}}$
❖ معادلة المستقيم	$ax + by + c = 0$
❖ توازي المستقيمين L_1, L_2	$\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2} \Leftrightarrow m_1 = m_2$
❖ تعامد المستقيمين L_1, L_2	$\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2} \Leftrightarrow m_1 \times m_2 = -1$

المقــدمــة

في الرياضيات الكلاسيكية، الهندسة التحليلية وتدعى ايضاً الهندسة الأحداثية او التنسيقية وسابقاً الهندسة الديكارتية، هي فرع المعرفة الرياضية الذي يدرس الهندسة بإستعمال نظام الإحداثيات ومبادئ الجبر والتحليل.

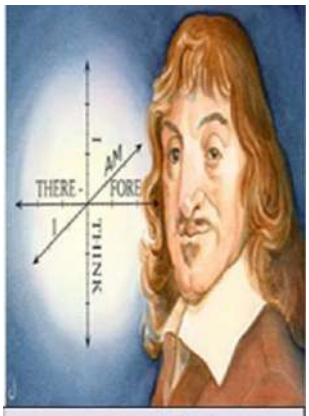
تستعمل الهندسة التحليلية بشكل واسع في الفيزياء والهندسة التطبيقية كما تمثل الأساس الذي بني عليه باقي مجالات الهندسة الجبرية والهندسة التفاضلية والهندسة المتقطعة والهندسة الحاسوبية.

في القرن الحادي عشر الميلادي، رأى عالم الرياضيات المسلم عمر الخيام علاقة قوية بين الجبر والهندسة متجهاً نحو الإتجاه الصحيح حين ساعد على سد الفراغ الموجود بين الجبر العددي والجبر الهندسي من خلال الحلول الهندسية للمعادلات التكعيبية العامة ولكن الخطوة النهائية اتت فيما بعد مع ديكارت.


عمر الخيام

العالم الفرنسي رينيه ديكارت [1596-1650] حقق تطورات مهمة نشرها في عمل له عنوانه الهندسة. كتب هذا العمل باللغة الفرنسية ونُشر عام (1637).

تستخدم الهندسة التحليلية نظاماً إحداثياً يسمى النظام الديكارتي، نسبة لصاحب الفكرة الأساسية رينيه ديكارت للربط بين الهندسة والجبر وهي تمثيل كل نقطة في المستوى ببعدها عن مستقيمين متعامدين يلتقيان في نقطة تسمى نقطة الأصل (0،0).



رينيه ديكارت

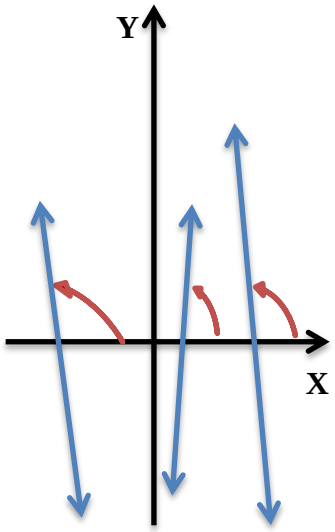
كان (بيير دي فيرما) [1601-1665] وهو عالم رياضيات هاو فرنسي الاصل من السباقين في تطور الهندسة التحليلية ،اكتسب الهندسة التحليلية عن ديكارت وقد تحصل على نتائج متطورة في المجال ولكنه لم يتمكن من نشرها، وقد كان من السباقين في تطور الهندسة التحليلية.

يسمى المستقيمان المتعامدان محوري الاحداثيات فالمحور الأفقي هو المحور X والمحور الرأسي هو المحور Y ويحدد موقع النقاط في المستوى بإعطائها احداثين على خط الأعداد.

[6-1]: زاوية الميل Slope's Angle

تعريف [6-1] :

تعرف زاوية ميل المستقيم بأنها الزاوية المحصورة بين كل من المستقيم ومحور X-axis بالإتجاه الموجب.



شكل (1-6)

أن جميع الزوايا المؤشرة في الشكل (1-6)، تكون موجبة لانها عكس اتجاه حركة عقرب الساعة. اما المستقيم الذي لايقطع محورX نمده على استقامته حتى يقطعه فتكون الزاوية الموجبة المحصورة بينه وبين محور X هي زاوية الميل، اما اذا كان المستقيم موازياً لمحور X فتكون زاوية الميل إما 0°أو 180°.

الشكل (1-6) يمثل زاوية ميل المستقيم.

ولما كانت زاوية الميل يمكن ان تكون زاوية حادة او قائمة او منفرجة عليه فأننا يمكن أن نستنتج ما يلي:-

- ظل زاوية الميل يكون موجباً عندما تكون زاوية الميل حادة.
- ويكون سالباً عندما تكون زاوية الميل منفرجة [لأن $(\tan \theta)$ في الربع الثاني يكون سالباً].
- اما اذا كان المستقيم موازياً لمحور X فأن ميله صفراً.
- اذا كان المستقيم موازياً لمحورY [عموديا على محور X]، اي ان زاوية الميل قائمة، فإن ميله غير معرف، لأن [$\tan 90^{\circ} = \frac{1}{0}$].

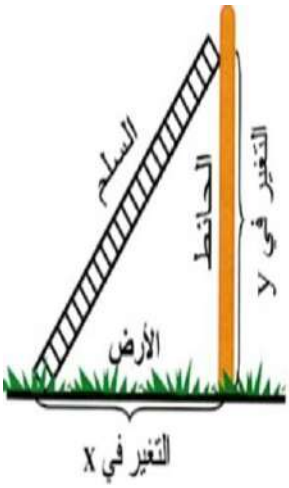
[6-2] : ميل المستقيم The Slope of the Line

يعتبر الميل في الرياضيات قياسا لإنحدار الخط المستقيم (ضمن جملة الاحداثيات الديكارتية) . ويمكن حساب ميل الخط المستقيم بسهولة باستخدام مفاهيم الجبر والهندسة.
اما في التحليل (ليس في منهجنا) فيمكن تحديد ميل المماس في كل نقطة من نقاط المنحني.

تعريف [6-2] :- الميل The Slope

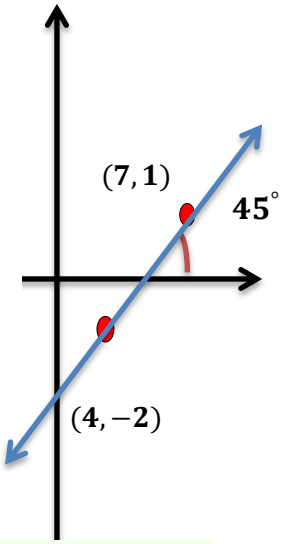
يعرف الميل بأنه النسبة بين التغير في الاحداثي الصادي[Y-axis] الى التغير في الاحداثي السيني [X-axis] لنقطتين معلومتين تنتميان للمستقيم.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



مثال توضيحي:

سلم يرتكز على حائط رأسيا وطرفه الأسفل على الارض .فأذا بدا الطرف الاسفل للسلم بالانزلاق بعيدا عن الحائط فأن طرفه الاعلى يبدأ بالانزلاق الى الاسفل فنلاحظ ان الانحدار يبدأ تدريجيا وهذا ما يسمى بالميل.



شكل (6-2)

مثـــال (1) :- جد انحدار المستقيم المار بالنقطتين $(4,-2)$،$(7,1)$ ثم جد زاويته.

الحـــل:-

انحدار المستقيم $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$= \frac{-2-1}{4-7}$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

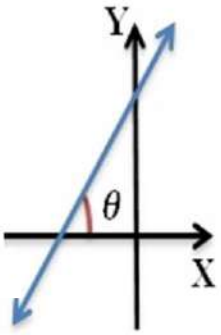
$$\tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

أي أن هذا المستقيم يصنع زاوية قدرها 45° بالإتجاه الموجب لمحور X.

[6-2-1] : ميل المستقيم اذا علمت زاوية ميله

تعريف [6-3] :-

يعرف ميل المستقيم إذا علمت زاوية ميله بأنه ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ مع الاتجاه الموجب للمحور X.



شكل (6-3)

فإذا كانت الزاوية التي يصنعها المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ مع الإتجاه الموجب لمحور X هي θ فإن ميل المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ = ظل الزاوية θ أي أن :

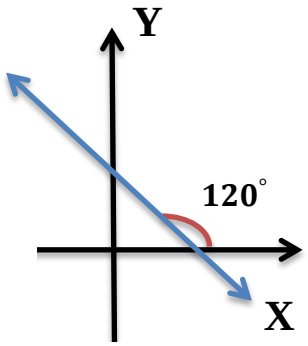
$$m_{\overleftrightarrow{L}} = \tan\theta$$

-نلاحظ الشكل (6-3) حيث يمثل الميل ظل (tan) الزاوية θ التي صنعها المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ مع الإتجاه الموجب لمحور X بحيث أن :

$$\theta \in [0, 180^\circ) \setminus \{90^\circ\}$$

مثـــال (2) :- جد ميل المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها 120° مع الإتجاه الموجب لمحور X.

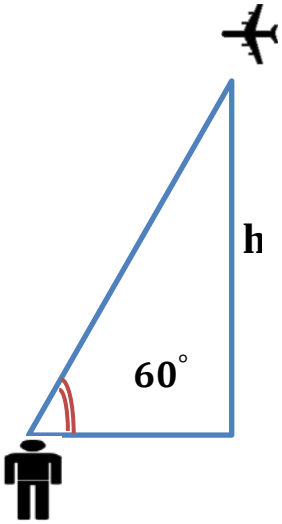
الـــحل:-



شكل(4-6)

$$m = \tan\theta^\circ$$
$$m = \tan 120^\circ$$
$$\therefore \quad m = \tan(180^\circ - 60^\circ)$$
$$m = -\tan 60^\circ \Longrightarrow -\tan 60^\circ = -\sqrt{3} \Longrightarrow m = -\sqrt{3}$$
$$\therefore \quad m = -1.732$$

مثـــال توضيحي:- ينظر رجل الى طائرة في السماء تبعد عنه افقيا بزاوية ارتفاع (60°)، ما ميل المستقيم الذي يربط الرجل بالطائرة.



الـــحل:-

- ميل المستقيم يكون:-

$$m = \tan\theta$$
$$\therefore m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

استنتاجات

هناك علاقة بين الميل ورسم المستقيمات:

- إذا كان الميل موجب > 0، فإن المستقيم يكون في صعود من جهة اليمين للمحور X الموجب.
- إذا كان الميل سالب < 0، فإن المستقيم يكون في هبوط الى جهة اليمين للمحور X الموجب.
- إذا كان الميل = 0، يكون المستقيم افقي (موازي للمحور X).
- إذا كان الميل = ∞ (غير معرف)يكون المستقيم عمودي(موازي للمحور Y).

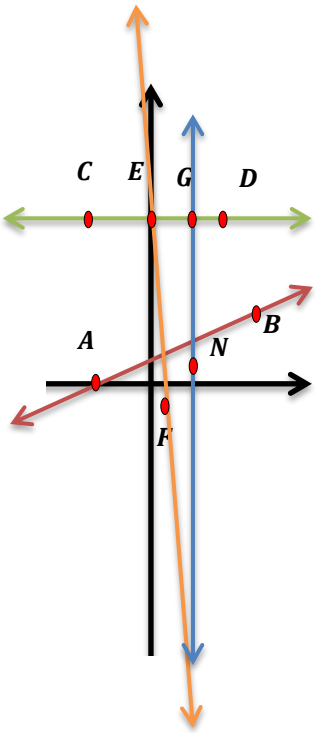
مثـــال (3) :- جد ميل المستقيمات المبينة إحداثياتها في كل مما يلي مع الرسم ؟

1- $A(-4,0), B(6,2)$

2- $C(-2,4), D(4,4)$

3- $E(0,4), F(1,-1)$

4- $G(3,4), N(3,1)$



شكل (5-6)

الحل:-

$$1)\ m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-0}{6-(-4)}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}>0$$

$\Rightarrow$ المستقيم في صعود من جهة اليمين للمحور X

$$2)m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-4}{4-(-2)}=\frac{0}{6}=0$$

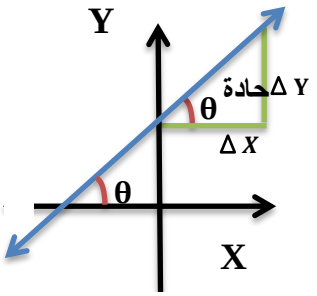
$\Rightarrow$ المستقيم موازي للمحور X

$$3)\ m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-1-4}{1-0}=\frac{-5}{1}=-5<0$$

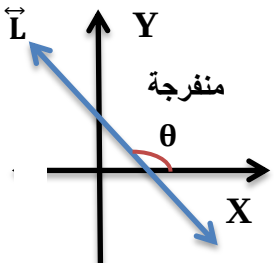
$\Rightarrow$ المستقيم في هبوط الى جهة اليمين للمحور X الموجب

$$4)\ m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-4}{3-3}=\frac{-3}{0}=\infty$$

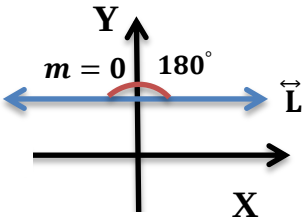
$\Rightarrow$ المستقيم موازي لمحور Y



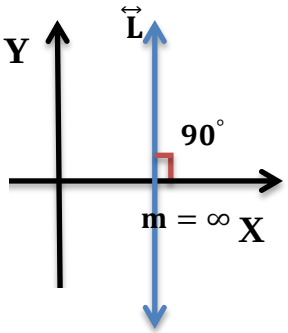
شكل (6-6)



شكل (6-7)



شكل (6-8)



شكل (6-9)

خلاصـــــة

1- الميل عدد مجرد من الوحدات.

2- اذا كانت زاوية الميل حادة فأن ميل المستقيم عدد موجب أي أن:

a) إذا كانت الزاوية θ التي يصنعها المستقيم حادة ⟵ $m > 0$ أي أن قيمة الميل (عدد موجب) كما في الشكل (6-6).

b) إذا كانت زاوية الميل θ التي يصنعها المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ منفرجة ⟵ $m < 0$ أي أن قيمة الميل (عدد سالب) كما في الشكل (6-7).

c) إذا كانت زاوية الميل θ التي يصنعها المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ مستقيمة ⟵ $m = 0$ أي أن المحور X // $\overleftrightarrow{L}$ كما في الشكل (6-8).

d) إذا كانت زاوية الميل θ التي يصنعها المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ قائمة فإن $m = \infty$ اي غير معرفة، أي أن المحور Y // $\overleftrightarrow{L}$ كما في الشكل (6-9).

مثـــال (4) :- جد ميل المستقيم الذي يصنع مع الإتجاه الموجب للمحور X زاوية مقدارها (30°).

الحل:-

$$\because m = \tan\theta$$

$$m = \tan 30^\circ$$

$$\therefore m = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

مثـــال (5) :- جد ميل المستقيم الذي يصنع مع الأتجاه الموجب للمحور X زاوية مقدارها $\frac{\pi}{3}$.

الحـل:-

$$\begin{aligned} m &= \tan\theta \\ &= \tan\frac{\pi}{3} = \tan 60^\circ \\ \therefore m &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

مثـــال (6) :- جد ميل المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب للمحور X زاوية مقدارها 135°؟

الحـل:-

$$\begin{aligned} m &= \tan\theta \\ m &= \tan 135^\circ \\ &= \tan(180^\circ - 45^\circ) \\ &= -\tan 45^\circ \\ \therefore m &= -1 \end{aligned}$$

مثـــال (7) :- جد ميل المستقيم الذي يصنع زاوية مقدارها $\frac{5\pi}{3}$ مع الإتجاه الموجب للمحور X.

الحـل:-

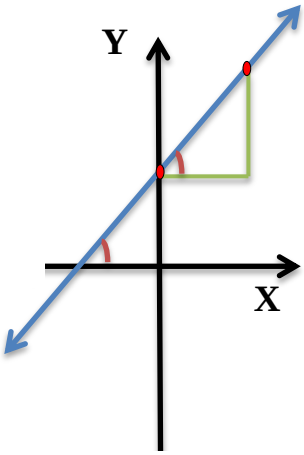
$$\begin{aligned} m &= \tan\theta \\ \therefore m &= \tan\frac{5\pi}{3} \\ &= \tan 300^\circ \\ &= \tan(360^\circ - 60^\circ) \\ &= -\tan 60^\circ \\ \therefore m &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$

[6-2-2]: ميل المستقيم إذا علمت منه نقطتين

إذا كان $\overleftrightarrow{L}$ احد المستقيمات في المستوي الاحداثي وكانت النقطتين $A(x_1, y_1)$ و$B(x_2, y_2)$ تقعان عليه فإن ميل المستقيم المار بهما هو:

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\therefore\ m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

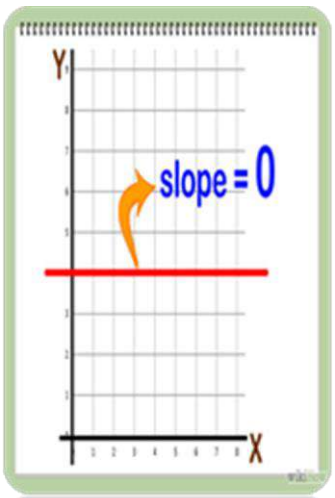


شكل (6-10)

بشرط أن تكون $x_1 \neq x_2$، لاحظ الشكل (6-10).

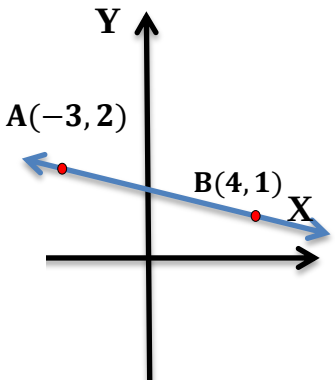
ملاحظات

- إذا كان $(y_2 - y_1 = 0)$ يعني أن ميل المستقيم$(m_{\overline{AB}} = 0)$، اي أن ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ الموازي للمحور X = ميل كل مستقيم موازي له= 0.
- إذا كان $(x_2 - x_1 = 0)$ يعني أن ميل المستقيم $(m_{\overline{AB}} = \infty)$ (كمية غير معرفة)، أي أن ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ الموازي للمحور Y = ميل كل مستقيم موازي له = ∞ (كمية غير معرفة).



مثـــال (8) :- جد ميل المستقيم المار بالنقطتين $A(-3,2)$ ، $B(4,1)$.

الحـل:-



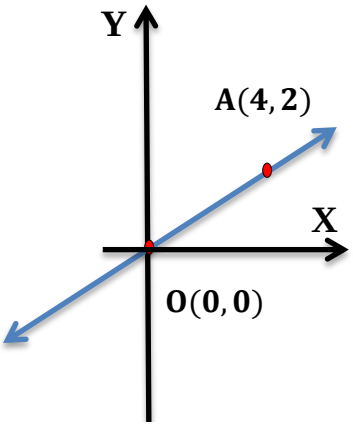
شكل (6-11)

$$\because m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

$$\therefore m_{\overline{AB}} = \frac{1-2}{4-(-3)} \Rightarrow m_{\overline{ab}} = \frac{-1}{7}$$

مثـــال (9) :- جد ميل المستقيم المار بالنقطة $A(4,2)$ وبنقطة الأصل $O(0,0)$.

الحـل:-



شكل (6-12)

$$\because m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

$$\therefore m_{\overline{OA}} = \frac{0-2}{0-4} = \frac{-2}{-4} \Rightarrow m_{\overline{OA}} = \frac{1}{2}$$

مثـــال (10) :- جد ميل المستقيم المار بنقطة تقاطع االمستقيمين $x + y = 3$ ، $3x - y = 5$ وبالنقطة $(-1,3)$.

الحـل:-

نجد نقطة تقاطع المستقيمين

$$x + y = 3 \ldots (1)$$
$$3x - y = 5 \ldots (2)$$

$$4x = 8 \qquad \div 4$$
$$x = 2$$

بالتعويض عن قيمة x في معادلة(1) $x + y = 3 \Rightarrow 2 + y = 3 \Rightarrow y = 1$

نقطة التقاطع(2,1)

∴ميل المستقيم المار بالنقطتين (2,1) ، (-1,3):

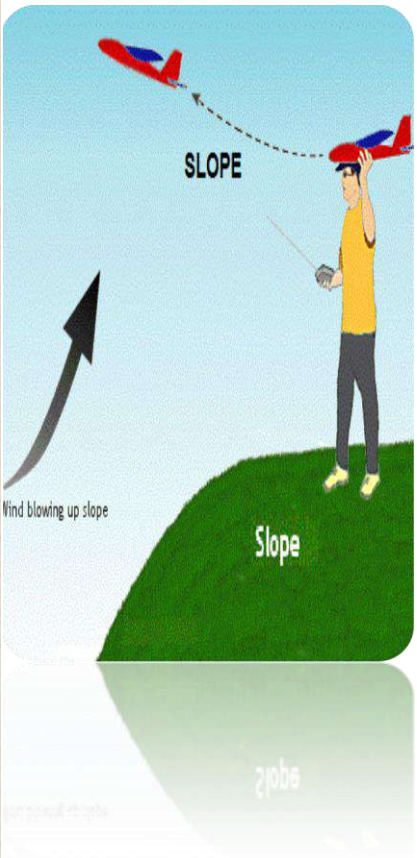
$$\because m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow m = \frac{3-1}{-1-2} \Rightarrow m = \frac{2}{-3}$$

مثـــال (11) :- جد ميل كل من المستقيمات المحددة بالنقاط المبينـة احداثياتها كالآتي . $A(-4,5),\ B(2,1),\ C(1,-1),\ D(4,2)$

الحـل:-

$$\because m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



$$m_{\overline{AB}} = \frac{1-5}{2-(-4)} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

$$m_{\overline{BC}} = \frac{-1-1}{1-2} = 2$$

$$m_{\overline{CD}} = \frac{2-(-1)}{4-1} = 1$$

$$m_{\overline{AD}} = \frac{2-5}{4-(-4)} = \frac{-3}{8}$$

$$m_{\overline{AC}} = \frac{-1-5}{1-(-4)} = \frac{-6}{5}$$

$$m_{\overline{BD}} = \frac{2-1}{4-2} = \frac{1}{2}$$

تمارين [1-6]

أولاً:-

1- جد ميل المستقيم المار بالنقطتين $(0,2),(-2,0)$؟

2- إذا كانت $A(2,3)B(-3,h)$ جد قيمة h بحيث يكون ميل $\overline{AB} = \frac{1}{2}$ ؟

3- ABC مثلث رؤوسه $A(1,6),B(-2,-8),C(-7,2)$، جد ميل المستقيم المتوسط للمثلث ABC المار بالنقطة B.

4- المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ يقطع محور X في النقطة $(x,0)$ ويقطع محور Y بالنقطة $(6,0)$ وكان ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AB} = 2$ فما قيمة x ؟

ثانياً:- لكل فقرة في ما يأتي أربع إجابات، واحدة فقط منها صحيحة. حدد الإجابة الصحيحة لكل فقرة:

1- مستقيم يمر بالنقطتين $(1,2)$ $(2,-1)$ فأن ميله هو:

a) $\frac{-3}{4}$ b) -3 c) $\frac{4}{-5}$ d) $\frac{4}{5}$

2- إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ يصنع زاوية مقدارها 45°، فإن ميل المستقيم هو:

a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) -1 d) 1

3- ABCD مستطيل حيث A=(0,0), B=(5,0), C=(5,2), D=(0,2) فأن ميل قطره $\overline{AC}$ هو :

a) $\frac{2}{-5}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{1}{5}$ d) 2

4- دائرة مركزها $C(-2,3)$ يمر محيطها بالنقطة $A(1,4)$ فأن ميل نصف قطرها هو :

a) $\frac{1}{3}$ b) 3 c) 2 d) -1

[6-3] :معادلة المستقيم الذي يمر بنقطتين

لقد درست سابقاً ان كل نقطة في الاحداثي تمثل زوج مرتب (x, y) من الأعداد وأن اي خط مستقيم في المستوى الاحداثي يمر بعدد لا حصر له من النقاط و مع ذلك يكفي ان نعلم احداثيي نقطتين فقط تقعان عليه لنتمكن من رسمه فعند رسم القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتين ومدها على استقامتها من كلا طرفيها (ليس هنالك حدود للإمتداد) نحصل على ذلك المستقيم.

لكل خط مستقيم توجد علاقة بين نقاطه ونكتبها بأبسط صورة تربط بين الاحداثي x وy للنقط الواقعة عليه . وتسمى هذه العلاقة بإسم معادلة الخط المستقيم ونكتبها بالصورة $[y = ax + b]$، حيث $a, b \in R$.

أي لو اخذنا المعادلة الخطية $ax + by + c = 0$ حيث $a, b \neq 0, a, b, c \in R$ لوجدنا بأنه كلما فرضنا قيمة لـ x تكون هنالك قيمة لـy تحقق المعادلة أي لانهاية من القيم لكل من x, y تحقق المعادلة وهذه عبارة عن الاحداثين x وy لهذه النقاط التي لو وصلنا بينها لوجدنا أنها تقع على استقامة واحدة. فيمكننا القول بأن المعادلة:

$$ax + by + c = 0$$

هي معادلة مستقيم.

مثال توضيحي :-

لو اخذنا المعادلة $2x - y + 1 = 0$ لوجدنا بأن النقاط $(3, 7), (1, 3), (2, 5)$ كلها تحقق المعادلة ولو اخذنا النقطة (3,4) فأنها لاتقع على المستقيم الواصل بين النقاط المذكورة اعلاه و لاتحقق معادلته .

مثـــال (18) :- بين ان النقطة $(2, -5)$ لاتقع على المستقيم $2x - 4y = 6$.

الحـــل:- نعوض النقطة بمعادلة المستقيم

$$2x - 4y = 6$$

$$2(2) - 4(-5) = 6 \Rightarrow 4 + 20 = 6 \Rightarrow 24 = 6$$

∵الطرفان غير متساويان

∴ النقطة لا تقع على المستقيم.

خلاصة

معادلة المستقيم معادلة خطية من الدرجة الاولى ذات مجاهيل احداثيه حلها يمثل ذلك المستقيم على المستوى الإحداثي بمعنى:

$$\{a, b \neq 0, a, b, c, x, y \in R : ax + by + c = 0\}.$$

للاطلاع:-

للبرهنة على أن المعادلة $ax + by + c = 0$ هي معادلة مستقيم:

نفرض ان النقاط $F(x_3, y_3), H(x_2, y_2), D(x_1, y_1)$ تقع على الخط البياني الذي تمثله المعادلة $ax + by + c = 0$ فنقول بما أن هذه النقاط تقع على المستقيم فهي تحقق معادلته:

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \ldots (1)$$

$$ax_2 + by_2 + c = 0 \ldots (2)$$

$$ax_3 + by_3 + c = 0 \ldots (3)$$

وبطرح 1 من 2 ينتج:-

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$$

$$\therefore \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-a}{b}$$

أي أن $m_{\overline{DH}} = \frac{-a}{b}$

وبطرح 2 من 3 ينتج:-

$$a(x_3 - x_2) + b(y_3 - y_2) = 0$$

$$\therefore \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{-a}{b}$$

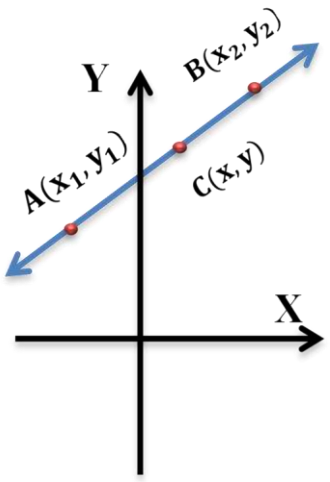
أي أن $m_{\overline{HF}} = \frac{-a}{b}$

$\therefore \overline{DH} \ // \ \overline{HF}$ ولكن $\overline{DH}, \overline{HF}$ مشتركان بالنقطة H

عليه يجب أن تكون النقاط D, H, F على أستقامة واحده.

[6-3-1]: ايجاد معادلة المستقيم إذا علمت منه نقطتان

لنفرض أن النقطتين المعلومتين على المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ $B(x_2, y_2), A(x_1, y_1)$،
وأن النقطة على المستقيم $C(x, y)$ اي نقطة كما في الشكل (6-17)، فان :



شكل (6-13)

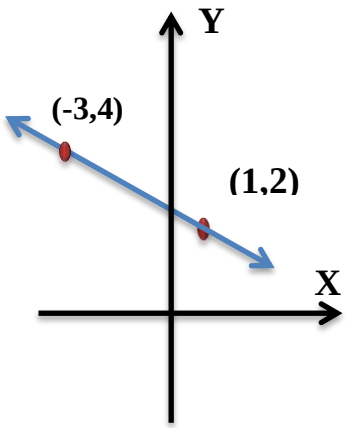
$$m_{\overline{AC}} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

ولما كان $\overline{AC}$ هو جزء من المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$، فأن ميله هو نفس ميل $\overleftrightarrow{AB}$ لذلك يكون:

$$m_{\overline{AC}} = m_{\overleftrightarrow{AB}}$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثـــال (12) :- جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(-3, 4), (1, 2)$.



شكل (6-14)

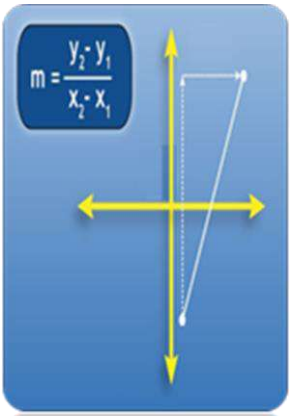
الحـــل:-

$$\because \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore \frac{y - 4}{x + 3} = \frac{2 - 4}{1 - (-3)}$$

$$\Rightarrow \frac{y - 4}{x + 3} = \frac{-2}{4}$$

المعادلة المطلوبة $\Leftarrow$ $x + 2y - 5 = 0$



مثـــال (13) :- جد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة $A(2,-5)$.

الحـــل:-

$\because A(2,-5), O(0,0)$:-

$$\because \frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-0}{x-0}=\frac{-5-0}{2-0}$$

$$\frac{y}{x}=\frac{-5}{2}$$

المعادلة المطلوبة $\Leftarrow 5x+2y=0$



معلومات في الرياضيات

- أول من اخترع الآلة الحاسبة هو الفرنسي بليز باسكال عام 1942م لإجراء عملية القسمة بواسطة عجلات تحمل الأرقام.
- أول من وضع نظرية الزمر هو الفرنسي ايفارست غالو [1811-1832م].
- أول من بين طريقة إيجاد الجذر التكعيبي هو ابو الحسن علي بن أحمد.

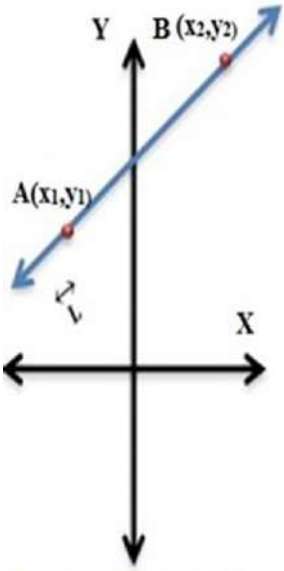
[6-4] : معادلة المستقيم إذا علم منه الميل ونقطة

المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ والذي ميله m فأذا كانت النقطة المعلومة منه هي $A(x_1, y_1)$، وبفرض أن النقطة الثانية هي $B(x, y)$، وكما في الشكل (6-19) فأن :

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\therefore \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

هي المعادلة للمستقيم الذي يمر بالنقطة (x_1, y_1) وميله m.



شكل (6-15)

مثـــال (14) :- جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(5, -1)$ وميله $\frac{-2}{3}$.

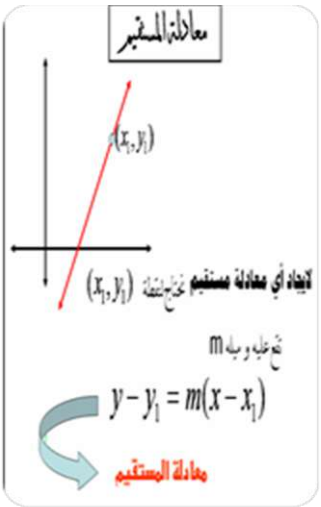
الحـــل:-

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 1 = \frac{-2}{3}(x - 5)$$

$$\therefore 2x + 3y - 7 = 0 \quad \text{المعادلة المطلوبة}$$

وعند كتابة المعادلة السابقة بالصورة: $y = \frac{-2}{3}x + \frac{7}{3}$



نلاحظ أن معامل x هو ميل المستقيم ولذلك يمكن أيجاد ميل المستقيم من معادلته بوضعه بالصورة الآتية:-

$$y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$$

عليه فأن ميل المستقيم سيكون $\frac{-a}{b}$.

ويمكن أن نجد ميل المستقيم بالطريقة الأخرى و ذلك من خلال ملاحظتنا المعادلة نفسها $2x + 3y - 1 = 0$ فأن ميل المستقيم يكون سالب معامل x مقسوما على معامل y .

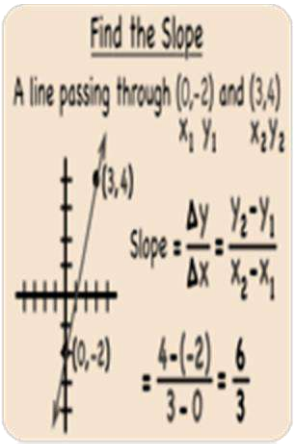
أي أن:

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{3}$$

وهو نفس الناتج.

مثـــال (15) :- جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-2,1)$ ويكون موازياً للمستقيم $3x-y+3=0$.

الحـــل:-



$$3x-y+3=0$$

$$m=\frac{-a}{b} \Rightarrow m=\frac{-3}{-1}$$

$m=3$ (ميل المستقيمات المتوازية متساوية)

$$y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow \quad y-1=3(x+2)$$

$$y-1=3(x+2) \Rightarrow \quad 3x-y+7=0$$

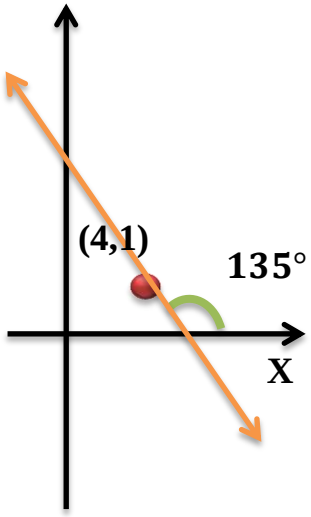
مثـــال (16):- جد معادلة المستقيم الذي ميله = $\frac{-1}{2}$ ويمر بالنقطة $(-4,0)$.

الحـــل:-

$$\because y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-0=-\frac{1}{2}(x-(-4)) \Rightarrow \quad 2y=-x-4$$

معادلة المستقيم $x+2y+4=0$



شكل (6-16)

مثـــال (17):- جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(4,1)$ ويميل بزاوية قدرها 135° مع المحور X .

الحـــل:-

$$\because \tan 135^\circ = \tan(180^\circ-45^\circ)$$

$$\therefore \tan 135^\circ = -\tan 45^\circ \Rightarrow m=-1$$

$$\because y-y_1=m(x-x_1)$$

$$\therefore \ y-161=-1(x-4) \Rightarrow y-1=-x+4$$

$$\therefore x+y-5=0$$

[6-5]:إستنتاج ميل المستقيم من معادلته

[6-5-1]: ميل المستقيم إذا علمت معادلته

إذا كانت معادلة المستقيم هي:

$$ax + by + c = 0$$

حيث $a, b, c \in R$ ، $a, b \neq 0$ معاً

فإن: $m = \frac{\text{معامل } x -}{\text{معامل } y}$

بشرط أن: $b \neq 0$،

$$\therefore m = \frac{-a}{b}$$

و x, y في طرف واحد من المعادلة.

الاستنتاج للاطلاع :- بفرض أن معادلة المستقيم هي: $ax + by + c = 0$

وبوضع $y = 0$ نجد: $ax + c = 0$

يسمى x بمقطع المحور X :

$$x = \frac{-c}{a}$$

∴ المستقيم يمر بالنقطة $\left(\frac{-c}{a}, 0\right)$

وبوضع $x = 0$ نجد: $by + c = 0$

يسمى y بمقطع المحور Y :

$$y = \frac{-c}{b}$$

∴ المستقيم يمر بالنقطة $\left(0, \frac{-c}{b}\right)$

∴ المستقيم يمر بالنقطتين $\left(0, \frac{-c}{b}\right)$ ، $\left(\frac{-c}{a}, 0\right)$

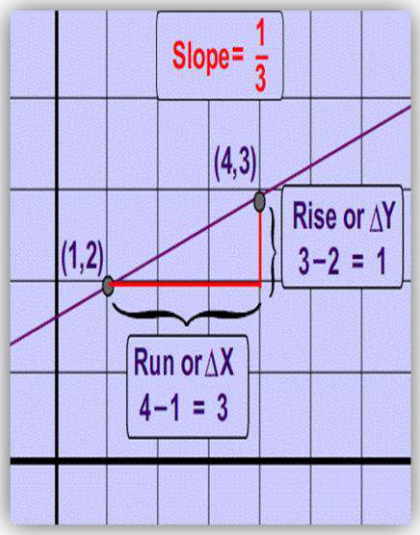
وبتطبيق القانون

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{0 - \left(\frac{-c}{b}\right)}{\frac{-c}{a} - 0}$$

$$= \frac{\frac{c}{b}}{\frac{-c}{a}}$$

$$m = \frac{-a}{b}$$

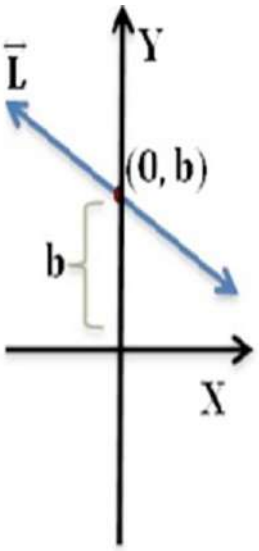


[2-5-6]: إيجاد معادلة المستقيم إذا علم منه الميل والمقطع للمحور Y

ليكن المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ الذي ميله m ويقطع المحور Y على بعد b، أي أن النقطة التي يقطع بها محور Y هي $(0, b)$، فنعوضها في معادلة المستقيم المعلوم منه ميله ونقطة تقاطعه فيكون:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - b = m(x - 0)$$

المعادلة المطلوبة $\Leftarrow$ $y = mx + b$



شكل (6-17)

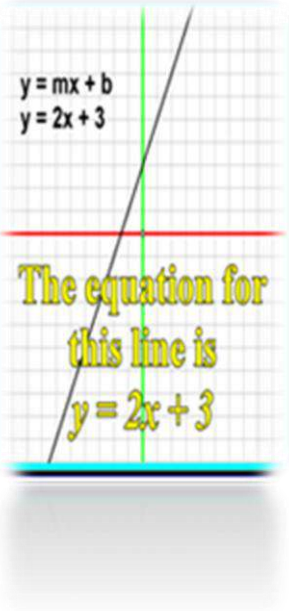
مثـــال (18):- جد معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{2}{5}$ ويقطع 3 وحدات من محور Y على الجزء السالب منه .

الحـل:-

$$\because \ y = mx + b$$

$$\therefore y = \frac{2}{5}x + (-3)$$

$$2x - 5y - 15 = 0 \quad \Leftarrow \quad \text{المعادلة المطلوبة} \ \therefore$$



مثـال (19):- جد معادلة المستقيم الذي يقطع المحور Y بالنقطة (0,5) وميله $\sqrt{3}$.

الحـل:-

الجزء المقطوع من محور Y هو 5

$$b = 5 \ , m = \sqrt{3}$$

بالتعويض بالقانون : $\because \ y = mx + b$

المعادلة المطلوبة $y = \sqrt{3}x + 5 \Longrightarrow \sqrt{3}x - y + 5 = 0$

مثـــال (20) :- جد الميل والمقطع للمحور Y للمستقيم الذي معادلته

$$x - 4y - 12 = 0 \ .$$

الحـل:-

$$\because m = \frac{-a}{b} = \frac{-1}{-4}$$

$$m = \frac{1}{4}$$

$$\because y = \frac{-c}{b} = \frac{-(-12)}{-4}$$

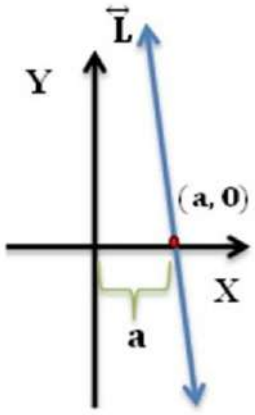
$$\therefore \ y = -3$$

[3-5-6]:ايجاد معادلة المستقيم إذا علم منه الميل والمقطع للمحور X

ليكن المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ الذي ميله (m) وأنه يقطع المحور X على بعد a ، أي أن النقطة التي يقطع بها المستقيم المحور X هي $(a, 0)$، و بالتعويض بقانون معادلة المستقيم:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 0 = m(x - a)$$

∴ المعادلة المطلوبة $\Leftarrow$ $y = m(x - a)$



شكل (6-18)

مثـــال (21) :- جد معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{2}{3}$ و يقطع 5 وحدات من المحور X بالاتجاه الموجب.

الحـل:-

$$y = m(x - a)$$
$$y = \frac{2}{3}(x - 5)$$

∴ المعادلة المطلوبة $\Leftarrow$ $2x - 3y - 10 = 0$

مثـــال (22) :- جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (2,0) وميله= $\frac{1}{4}$.

الحل:- الجزء المقطوع من محور X =2

$$a = 2 \ , m = \frac{1}{4}$$

بالتعويض بالقانون:

$$\because y = m(x - a)$$
$$y = \frac{1}{4}(x - 2)$$
$$4y = x - 2$$
$$\therefore x - 4y - 2 = 0$$ المعادلة المطلوبة

مثـــال (23):- جـــد الميـــل والمقطـــع للمحـــور X والمقطـــع للمحـــور Y للمســـتقيم الذي معادلته $3x - 4y = 24$ ، ثم ارسمه.

الحل:-

$$3x - 4y - 24 = 0$$

$$\text{الميل} = m = \frac{-a}{b}$$

$$= \frac{-3}{-4}$$

$$= \frac{3}{4}$$

المقطع للمحور X $\quad x = \frac{-c}{a}$

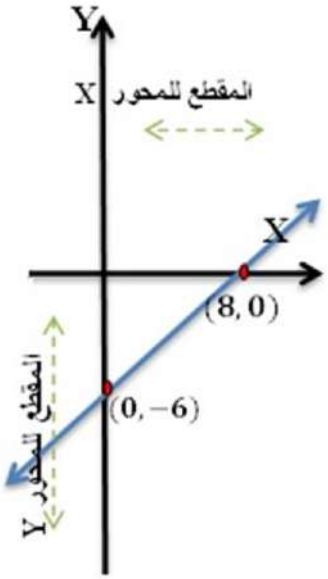
$$\therefore x = \frac{-(-24)}{3} = 8$$

∴ نقطة التقاطع مع محور X (8,0)

المقطع للمحور Y $\quad y = \frac{-c}{b}$

$$y = \frac{-(-24)}{-4} = -6$$

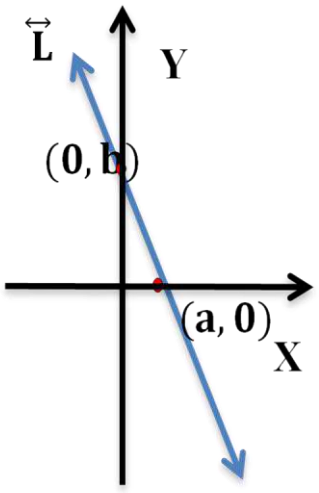
∴ نقطة التقاطع مع محور Y هي (0,−6)



شكل (6-19)

[4-5-6]:إيجاد معادلة المستقيم الذي يقطع المحورين الأحداثيين

نفترض أن المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ يقطع جزءاً مقداره a من المحور X، وجزءاً مقداره b من المحور Y، أي أن نقطتي التقاطع $(0,b),(a,0)$، فبالتعويض بقانون معادلة المستقيم:



شكل (6-20)

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-0}{x-a}=\frac{b-0}{0-a}$$

$$\frac{y}{x-a}=\frac{b}{-a}$$

$$bx+ay=ab$$

بالقسمة على ab تكون:

$$\therefore \text{المعادلة المطلوبة} \Leftarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

مثـــال (24) :- مستقيم يقطع من محور X السالب جزء اً طوله 2 ومن محور Y الموجب جزء اً طوله $1\frac{1}{3}$ جد معادلته المستقيم.

الحـــل:-

$$\because \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$$\therefore \frac{x}{-2}+\frac{y}{1\frac{1}{3}}=1 \Rightarrow \frac{x}{-2}+\frac{y}{\frac{4}{3}}=1$$

بضرب المعادلة في(-4) ينتج $\Leftarrow \frac{x}{-2}+\frac{3y}{4}=1$

$\therefore$ المعادلة المطلوبة $2x-3y+4=0$

[5-5-6]:معادلة المستقيم الموازي لأحد المحورين

ليكن لدينا مستقيم يوازي المحور X ويقطع المحور Y على بعد (b)، فيمكن أن نعتبر تقاطعه مع المحور السيني في اللانهاية فتكون المعادلة كالآتي:

$$\frac{x}{\infty}+\frac{y}{b}=1$$

ولما كان أي مقدار يساوي الصفر عندما يقسم على مالانهاية فالناتج يكون صفراً، أي أن:

$$0+\frac{y}{b}=1$$

$$\therefore \text{المعادلة المطلوبة} \Leftarrow y=b$$

أما إذا كان المستقيم يوازي المحور Y ويقطع المحور X على بعد (a) فأن المعادلة تكون:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{\infty}=1$$

$$\frac{x}{a}+0=1$$

$$\therefore \text{المعادلة المطلوبة} \Leftarrow x=a$$

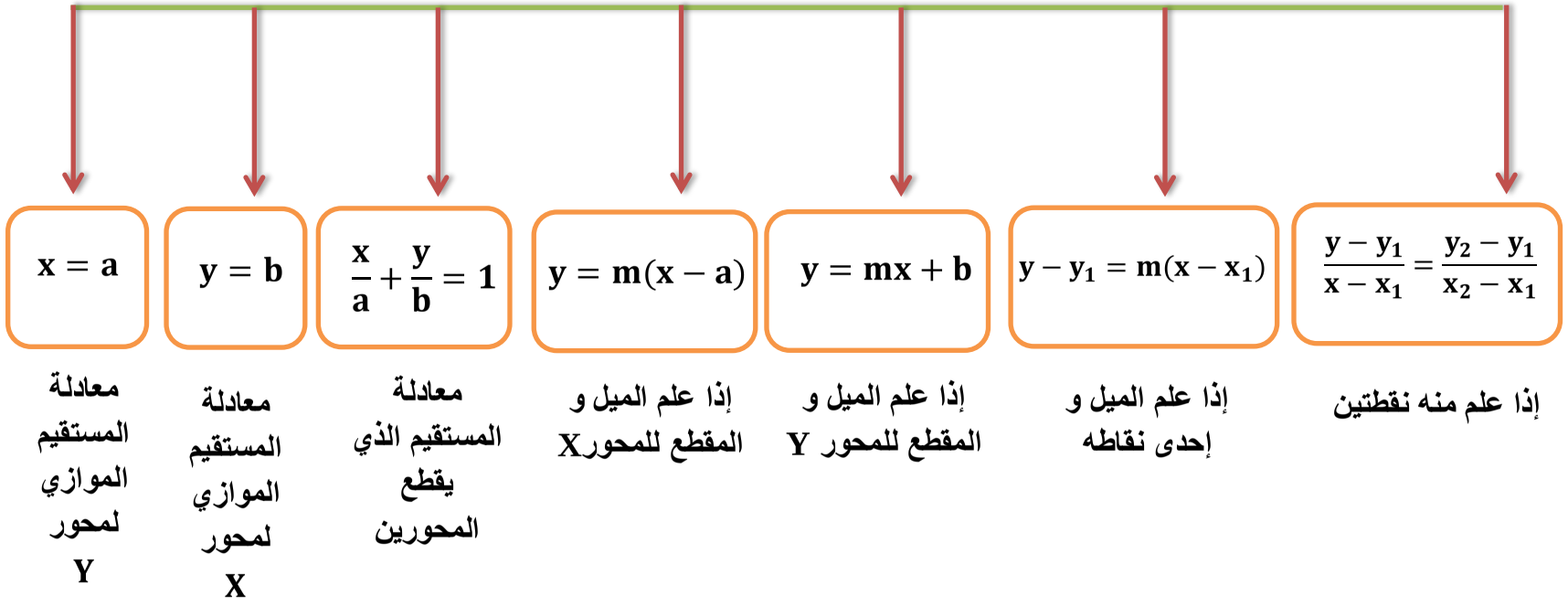
الخـلاصــة

الصيغة العامة لإيجاد معادلة المستقيم

$$ax + by + c = 0$$

$$a \neq 0, b \neq 0$$

طرق إيجاد معادلة المستقيم

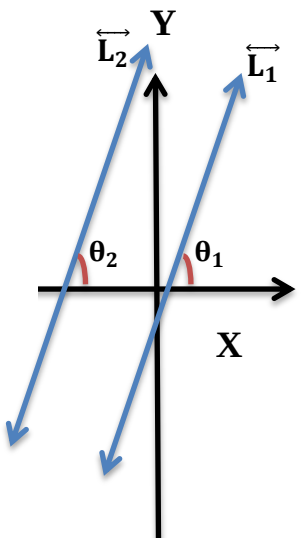


[6-6] :العلاقة بين ميلي المستقيمين المتوازيين والمتعامدين

[6-6-1] : شرط التوازي Parallel Condition

إذا كان المستقيمان متوازيين فأن زاويتي ميلاهما متساويتان ويكون ميليهما متساويين (بالتناظر) كما في الشكل (6-21).

$$\theta_1 = \theta_2$$
$$m_1 = m_2$$



شكل (6-21)

$\overleftrightarrow{L_1}$ ميله $= m_1$ ويصنع زاوية قياسها θ_1 مع الاتجاه الموجب لمحور X.

$\overleftrightarrow{L_2}$ ميله $= m_2$ ويصنع زاوية قياسها θ_2 مع الاتجاه الموجب لمحور X.

فإذا كان: $\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow \overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$

وكان: $\tan\theta_1 = \tan\theta_2 \Rightarrow m_1 = m_2$

فإن المستقيمين متوازيان.

أستنتاج

المستقيمان المتوازيان لهما الميل نفسه (لا يوازي اي منهما محور الصادات)

وبالعكس إذا كان للمستقيمان الميل نفسه فأنهما متوازيان.

$$\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2} \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

فإذا فرضنا أن $\overleftrightarrow{L_1}$ الذي معادلته $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

وأن $\overleftrightarrow{L_2}$ الذي معادلته $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

وكان ميل كل منهما هو:

$$m_1 = \frac{-a_1}{b_1} \qquad m_2 = \frac{-a_2}{b_2}$$

عليه فأن :-

$$\overleftrightarrow{L_1} \nparallel \overleftrightarrow{L_2} \Leftrightarrow \frac{-a_1}{b_1} = \frac{-a_2}{b_2}$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

مثـــال (25):- بيّن أن المستقيم الذي معادلته $5x + 6y = 7$ لا يوازي المستقيم الذي معادلته $4x + 8y - 2 = 0$.

الحـــل:-

$$m_{\overleftrightarrow{L_1}} = \frac{-a}{b} = \frac{-5}{6}$$

$$m_{\overleftrightarrow{L_2}} = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}$$

$$\because m_1 \neq m_2 \Rightarrow \overleftrightarrow{L_1} \nparallel \overleftrightarrow{L_2}$$

مثـــال (26):- بيّن أن المستقيم الذي معادلته $5x + 10y = 8$ يوازي المستقيم الذي معادلته $8x + 16y = 4$.

الحـــل:-

$$m = \frac{-a}{b}$$

$$m_{\overleftrightarrow{L_1}} = \frac{-a_1}{b_1} = \frac{-5}{10} = \frac{-1}{2}$$

$$m_{\overleftrightarrow{L_2}} = \frac{-a_2}{b_2} = \frac{-8}{16} = \frac{-1}{2}$$

$$\because m_1 = m_2 \Rightarrow \overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$$

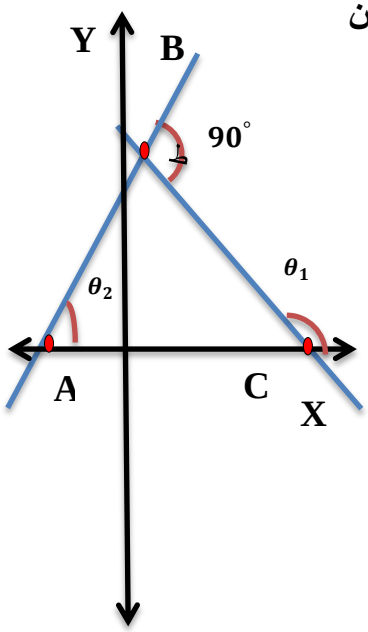
[6-6-2] :شرط تعامد المستقيمين Perpendicular Condition

اذا كان احد المستقيمين يصنع زاوية θ_1 مع المحور X بالاتجاه الموجب، والمستقيم الآخر يصنع زاوية θ_2 مع المحور X بالاتجاه الموجب ايضا وكان المستقيمان متعامدين اي ان :

$$\Rightarrow \tan\theta_1 = m_1$$

$$\Rightarrow \tan\theta_2 = m_2$$

ومن الشكل (6-22) نجد أن:



شكل (6-22)

$$m_1 = \frac{-1}{m_2} \Rightarrow m_1 \times m_2 = -1$$

$$m_1 \times m_2 = -1 \Leftrightarrow \overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2}$$

(27) :- اثبت تعامد المستقيمين $4x + 3y - 8 = 0 , 3x - 4y + 7 = 0$ ؟

مثال الحل:-

$$\because m = \frac{-a}{b}$$

$$\therefore m_1 = \frac{-a_1}{b_1} = \frac{-4}{3} \quad , \quad m_2 = \frac{-a_2}{b_2} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow m_1 \times m_2 = \frac{-4}{3} \times \frac{3}{4} = -1$$

$$m_1 \times m_2 = -1 \Rightarrow \overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2}$$

نتيجة

اذا كان كل من $\overleftrightarrow{L_1}, \overleftrightarrow{L_2}$ مستقيمين متقاطعين احدهما عمودي على الاخر (لا يوازي أي منهما محور Y) وكان ميلاهما m_1, m_2 على الترتيب فأن :

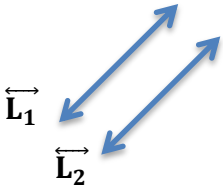
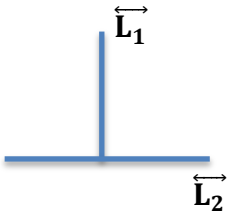
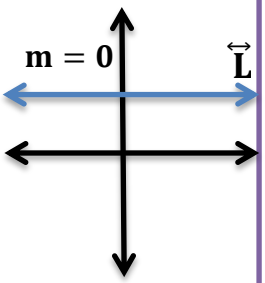
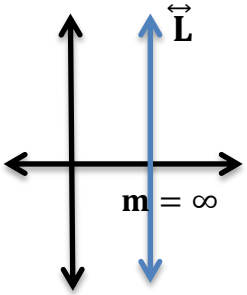
$$\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2} \Leftrightarrow m_1 \times m_2 = -1$$

مثـــال(28) :- إذا كان ميل المستقيم هو $\frac{-3}{4}$ فإن أي مستقيم يوازيه يكون ميله $\frac{-3}{4}$ وأن أي مستقيم عمود عليه يكون ميله = $\frac{4}{3}$ وإذا كان ميل المستقيم =2 فإن أي مستقيم يوازيه يكون ميله =2 وأي مستقيم عمود عليه يكون = $\frac{-1}{2}$.

قانون المـــــيل

إذا علمت نقطتين عليه	إذا علمت معادلته	إذا علمت زاوية ميله
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$m = \frac{-a}{b}$ $ax + by + c = 0$	$m = \tan\theta$

خلاصة الميـــــــــــل

التوازي	التعامد	توازي مع محور X	توازي مع محور Y
 $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} \Leftrightarrow$ $m_1 = m_2$	 $\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2}$ $\Leftrightarrow m_1 . m_2 = -1$		

تمـــارين [2-6]

أولاً:-

1- جد معادلة المستقيم المار:

أولاً- بالنقطة $(2,-3)$ **وميله** $\frac{-2}{5}$.

ثانياً- بالنقطتين $(4,-3),(-5,2)$.

2- جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(3,-1)$ **ويوازي المستقيم المار بالنقطتين** $(8,-1),(2,-4)$.

3- جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-2,3)$ **وعمودي على المستقيم المار بالنقطتين** $(7,-1),(5,3)$.

4- جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-3,2)$ **ويوازي المستقيم الذي معادلته : -**

$$2x-3y+1=0$$

5- جد معادلة العمود النازل من النقطة $(4,-1)$ **على المستقيم الذي معادلته:-**

$$3x+y-3=0$$

6- جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(4,-1)$ **ويصنع مع محور** X **زاوية مقدارها** 45° .

7- مستقيم يمر بالنقطة $(10,1)$ **ويقطع من محور** X **بالاتجاه الموجب جزءاً طوله** (3) **وحدات ، فما معادلته.**

8- مستقيم يمر بالنقطة $(3,-4)$ **ويقطع من محور** Y **بالاتجاه السالب جزءا طوله** (5) **وحدات ، فما معادلته.**

ثانياً:- جد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ **المار بالنقطة** $(2,-2)$ **وعمودي على المستقيم الذي معادلته** $x+y=0$**، ثم جد نقطة تقاطع المستقيم** $\overleftrightarrow{L}$ **مع المحورين الإحداثيين؟**

ثالثا:- لكل فقرة مما يأتي اربع إجابات، واحدة فقط منها صحيحة. حدد الإجابة الصحيحة لكل فقرة:

1- إن معادلة المستقيم الذي ميله = 2، ويقطع من المحور Y بالاتجاه السالب جزءاً طوله (4) وحدات هي:

a) $x = 2y - 4$ b) $2y = 2x - 4$ c) $y + 2x = 4$ d) $y = 2x - 4$

2- المستقيم الذي يقطع من المحور Y بالأتجاه الموجب جزءاً طوله (3) وحدات لابد أن يمر بالنقطة:

a) $(3,3)$ b) $(3,0)$ c) $(0,3)$ d) $(0,-3)$

3- أن قيمة a التي تجعل المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ الذي معادلته $2x + 3y + 1 = 0$ عمودياً على المستقيم $\overleftrightarrow{H}$ الذي معادلته $y = ax + 4$.

a) $\frac{-2}{3}$ b) $\frac{-3}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{2}$

4- إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ يمر بالنقطتين $(2,4),(-3,1)$ والمستقيم $\overleftrightarrow{R}$ والذي معادلته $6x + 5y = 1$ فإن:

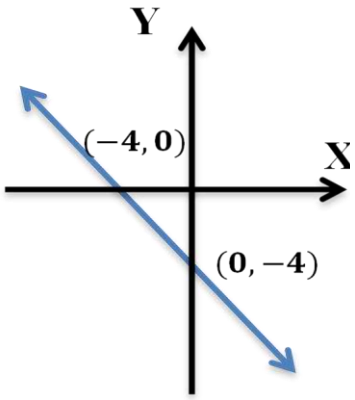
a) $\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{R}$ b) $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{R}$ c) مستقيمان غير متوازيان d) ليس اياً مما سبق صحيح

5- أن قيمة a التي تجعل المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ الذي معادلته $y = (a + 1)x + 2$ موازياً للمحور X هي:

a) 0 b) -1 c) 1 d) -2

رابعا :- بين أن المستقيم المار بالنقطتين $(3,-5),(3,9)$ لا يقطع المحور Y ثم جد معادلته.

خامساً:- أي من المعادلات الآتية يصف الرسم البياني المُمثل في الشكل (6-23) :



شكل (6-23)

1- $3y + 4x = -9$
2- $3y + 4x = -12$
3- $x + y = -4$
4- $3y - 4x = -12$

سادساً:- بين هل ان قطري الشكل الرباعي ABCD والذي فيه :

A(0,5) , B(4,8) , C(7,4) , D(3,1)

متعامدان ام لا؟


تم بحمد الله